

عدد المسائل: ثلاث	مسابقة في مادة الرياضيات المدة: ساعة ونصف	الاسم: الرقم:
-------------------	--	------------------

ملاحظة: - يسمح باستعمال آلة حاسبة غير قابلة للبرمجة أو اختزان المعلومات أو رسم البيانات.
- يستطيع المرشح الإجابة بالترتيب الذي يناسبه (دون الالتزام بترتيب المسائل الواردة في المسابقة).

I- (5 points)

Une étude a été menée auprès de la population active au Liban.

Le tableau suivant donne une estimation du nombre de chômeurs y_i (parmi la population active au Liban) en Juin de chaque année (rang x_i) entre 2016 et 2021.

Année	2016	2017	2018	2019	2020	2021
Rang x_i	1	2	3	4	5	6
Nombre annuel de chômeurs en centaines de milliers y_i	2	3	4	6	11	13

- Déterminer le pourcentage d'augmentation de chômeurs entre Juin 2019 et Juin 2021.
- Calculer les coordonnées du point moyen G.
- Calculer le coefficient de corrélation linéaire r et interpréter la valeur ainsi obtenue.
- Ecrire une équation de la droite de régression $(D_{y/x})$ de y en x .
- Représenter dans un repère orthogonal :
 - le nuage de points $(x_i ; y_i)$,
 - le point moyen G,
 - la droite de régression $(D_{y/x})$.
- Le modèle précédent reste valable seulement jusqu'à l'année 2025.
Supposons que la population active au Liban est estimée à 3 100 000 personnes en Juin 2025.
Samer affirme que le pourcentage de chômeurs atteint 75 % en juin 2025. A-t-il raison ? Justifier.

II- (5 points)

Partie A

On considère deux urnes U et V tel que :

- U contient cinq boules : trois rouges et deux noires.
- V contient trois boules : une rouge et deux noires.

On tire au hasard une boule de l'urne U et simultanément deux boules de l'urne V.

- Vérifier que le nombre de tous les tirages possibles est 15.
- Calculer le nombre de tirages contenant une boule rouge de U et deux boules de couleurs différentes de V.
- Calculer le nombre de tirages contenant trois boules de même couleur.

Partie B

Répondre, en justifiant, par vrai ou faux.

- L'équation $\ln(x) = -2$ admet une solution réelle.
- Pour $x > 0$, si $g(x) = \ln(x^2 + x)$ alors $g'(x) = \frac{1}{x^2 + x}$.
- Le domaine de définition de la fonction h donnée par $h(x) = \ln(1 + x) + \ln(x - 2)$ est $] -\infty ; -1[\cup] 2 ; +\infty[$.

III- (10 points)

Partie A

Soit f la fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ par $f(x) = e^{0,5x} - 1$.

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

- 1) Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. Calculer $f(2)$ et $f(4)$.
- 2) **a-** Calculer $f'(x)$ et dresser le tableau de variations de f .
b- En déduire le signe de $f(x)$.
- 3) Montrer que la droite (T) d'équation $y = 0,5x$ est tangente en O à (C).
- 4) Tracer (T) et (C). (Notons que (C) est au-dessus de (T))

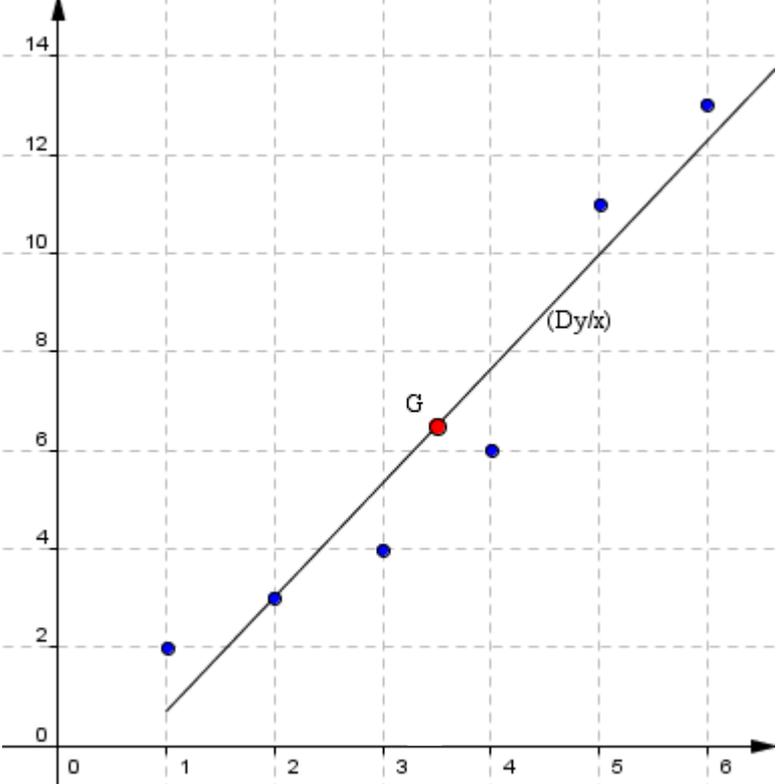
Partie B

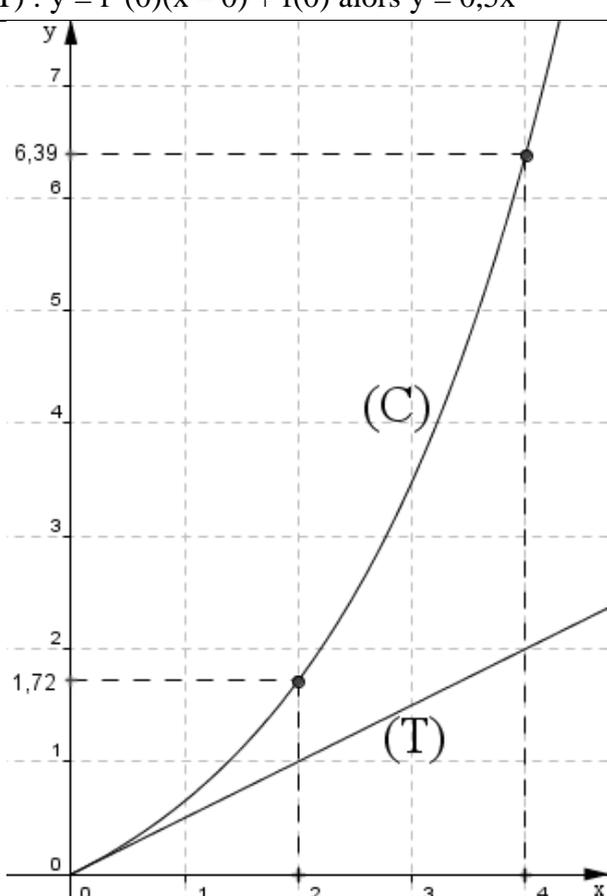
Une station de gaz vend de l'essence.

La fonction d'offre f et la fonction de demande g sont modélisées, pour tout $x \in [1 ; 8]$,

par $f(x) = e^{0,5x} - 1$ et $g(x) = \frac{5}{e^{0,5x} + 1}$ où :

- x est le prix de vente unitaire en centaines de millions LL,
 - $f(x)$ et $g(x)$ sont exprimées en dizaines de milliers de litres (Une unité vaut dizaines de milliers de litres).
- 1) **a-** Résoudre l'équation $f(x) = g(x)$.
b- En déduire le prix d'équilibre du marché (en LL) puis donner la quantité correspondante (en litres).
 - 2) **a-** Vérifier que l'élasticité de la demande par rapport au prix unitaire est $e(x) = \frac{-0,5xe^{0,5x}}{e^{0,5x} + 1}$
b- Calculer $e(2)$ et interpréter le résultat trouvé.
 - 3) Dans cette partie, le prix de vente d'un litre d'essence est 15 000 LL.
a- Estimer, en litres, la quantité d'essence demandée et celle offerte.
b- Si toute la quantité offerte est vendue et si le profit réalisé par cette vente est de 11 170 000 LL, calculer alors en LL le coût moyen de 20 litres.

Q.I	Réponses	6,25 pts
1	Le pourcentage d'augmentation = $\frac{13-6}{6} \times 100 = 117\%$	1
2	G(3,5 ; 6,5)	1
3	r = 0,961 donc il y a une forte corrélation positive entre x et y.	1
4	y = 2,314x - 1,6 ou y = 2,31x - 1,6 ou y = 2,3x - 1,6	1
5		1,25
6	<p>En Juin 2025, x = 10 donc y = 21,54 ou y = 21,8 ou y = 21,4</p> <p>Donc le pourcentage est $\frac{100\,000 \times 21\,54}{3\,100\,000} = 69,4\%$</p> <p>Ou le pourcentage est $\frac{100\,000 \times 21\,8}{3\,100\,000} = 70,3\%$</p> <p>Ou le pourcentage est $\frac{100\,000 \times 21\,4}{3\,100\,000} = 69,03\%$</p> <p>Donc Samer n'a pas raison car le pourcentage n'atteint pas 75 %.</p>	1
Q.II	Réponses	6,25 pts
A1	$C_5^1 \times C_3^2 = 5 \times 3 = 15$	1
A2	$C_3^1 \times (C_1^1 \times C_2^1) = 6$	1
A3	$C_2^1 \times C_2^2 = 2$	1,25
B1	Vrai, car $\ln x = -2 \cdot \ln e = \ln e^{-2}$ donc $x = e^{-2}$.	1
B2	Faux, car $g'(x) = \frac{2x+1}{x^2+x}$	1
B3	Faux, car h est définie si $x > -1$ et $x > 2$ donc $x > 2$ alors $D_f =]2 ; +\infty[$.	1

Q.III	Réponses	12,5 pts									
A1	$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{0,5x} - 1) = +\infty$; $f(2) = 1,72$; $f(4) = 6,39$	2									
A2a	$f'(x) = 0,5e^{0,5x}$ <table style="border-collapse: collapse; margin-left: 20px;"> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px; text-align: center;">x</td> <td style="padding: 5px; text-align: center;">0</td> <td style="padding: 5px; text-align: right;">$+\infty$</td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px; text-align: center;">f'(x)</td> <td colspan="2" style="padding: 5px; text-align: center;">+</td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px; text-align: center;">f(x)</td> <td style="padding: 5px; text-align: center;">0</td> <td style="padding: 5px; text-align: right;">$+\infty$</td> </tr> </table>	x	0	$+\infty$	f'(x)	+		f(x)	0	$+\infty$	2
x	0	$+\infty$									
f'(x)	+										
f(x)	0	$+\infty$									
A2b	$f(x) \geq 0$.	0,5									
A3	$f'(0) = 0,5$ donc (T) : $y = f'(0)(x - 0) + f(0)$ alors $y = 0,5x$	1									
A4		1									
B1a	$e^{0,5x} - 1 = \frac{5}{e^{0,5x} + 1}$ donc $e^x - 1 = 5$ alors $x = \ln 6$	1									
B1b	$\ln 6 = 1,791$ donc le prix d'équilibre est 179 100 000 LL. $f(\ln 6) = 1,449$ donc la quantité d'équilibre est 14 490 litres.	1									
B2a	$g'(x) = \frac{5(-0,5e^{0,5x})}{(e^{0,5x} + 1)^2}$ alors $e(x) = \frac{xg'(x)}{g(x)} = \frac{-0,5xe^{0,5x}}{e^{0,5x} + 1}$	1									
B2b	$e(2) = -0,73$. Quand le prix unitaire 2 augmente de 1 % alors la demande $g(2)$ diminue de 0,73 %. Donc la demande devient $g(2) \times (1 - 0,73)$.	1									
B3a	Prix d'un litre = 15 000 LL donc le prix unitaire en 10 millions LL devient $\frac{10\,000 \times 15\,000}{100\,000\,000} = 1,5$ donc $f(1,5) = 1,117$ donc la quantité offerte est 11 170 litres. $g(1,5) = 1,604$ donc la quantité demandée est 16 040 litres.	1									
B3b	$C_T = R - P$ avec $R = \text{quantité} \times \text{prix unitaire} = f(1,5) \times 1,5$ en dix millions LL $= 1,117 \times 1,5 \times 100\,000\,000 \text{ LL} = 167\,550\,000 \text{ LL}$. Donc $C_T = 167\,550\,000 - 11\,170\,000 = 156\,380\,000 \text{ LL}$. Donc le coût moyen d'un litre est $\frac{156\,380\,000}{11\,170} = 14\,000 \text{ LL}$. Donc le coût moyen de 20 litres est 280 000 LL.	1									