

ملاحظة: - يسمح باستعمال آلة حاسبة غير قابلة للبرمجة او اختزان المعلومات او رسم البيانات.  
- يستطيع المرشح الإجابة بالترتيب الذي يناسبه (دون الالتزام بترتيب المسائل الواردة في المسابقة).

## مسابقة في مادة الرياضيات

المدة: ساعتان

باللغة الفرنسية

الاسم : .....

الرقم : .....

## I- (4 points)

Le tableau ci-dessous représente, entre l'année 1990 et l'année 2015, la population ( $y_i$ ) d'un certain village et le rang de l'année ( $x_i$ ) correspondante.

Année	1990	1995	2000	2005	2010	2015
Rang de l'année: $x_i$	0	5	10	15	20	25
Population: $y_i$	5 445	5 940	6 285	6 695	7 085	7 550

### Partie A

- 1) Calculer  $\bar{X}$  et  $\bar{Y}$ , les moyennes respectives des deux variables  $x_i$  et  $y_i$ .
- 2) Calculer le pourcentage d'augmentation de la population entre 1990 et 2015.
- 3) Trouver le coefficient de corrélation r.

Interpréter la valeur trouvée.

- 4) Déterminer l'équation de la droite de régression, de  $y$  en  $x$ ,

$$(D_{y/x}) : y = mx + n$$

où  $m$  et  $n$  sont deux réels (arrondir  $m$  et  $n$  à  $10^{-1}$  près).

### Partie B

On suppose que le modèle précédent reste valable jusqu'à l'année 2024.

- 1) Résoudre l'inéquation  $y > 8250$ .

**Déterminer** l'année durant laquelle la population de ce village dépasse **8 250** pour la première fois.

- 2) Dans ce village, **le nombre de personnes** qui utilisent l'internet en l'année 2018 était **2 000**.

On suppose que ce nombre **augmente** chaque année **de 100 personnes**.

a- **Calculer** le nombre de personnes de ce village qui utilisent l'internet en l'année 2024.

b- En 2024, on suppose que deux personnes sont interrogées successivement et au hasard dans ce village. **Calculer** la probabilité que ces deux personnes utilisent l'internet.

## II- (4 points)

Dans un club sportif :

- **40 %** des membres sont des filles, **parmi** elles **30 %** participent à la compétition nationale
- **60 %** des membres sont des garçons, **parmi** eux **80 %** participent à la compétition nationale.

### **Partie A**

On choisit au hasard un membre de ce club.

On considère les événements suivants :

**F** : « le membre choisi est une fille »

**G** : « le membre choisi est un garçon »

**C** : « le membre choisi participe à la compétition nationale ».

1) Calculer la probabilité  $P(F \cap C)$ .

Vérifier que  $P(C) = \frac{3}{5}$ .

2) Le membre choisi n'a pas participé à la compétition nationale.

Calculer la probabilité que ce membre est un garçon.

### **Partie B**

Ce club compte **50** membres.

La direction de ce club a décidé de choisir **simultanément** et **au hasard** un groupe de trois membres pour représenter le club à l'étranger.

1) Vérifier que le nombre de filles de ce club est **20**.

Déterminer alors le nombre de garçons de ce club.

2) Vérifier que la probabilité de choisir un groupe formé de deux filles et d'un

garçon est égale à  $\frac{57}{196}$ .

3) Vérifier que la probabilité de choisir un groupe formé par au moins une fille

et au moins un garçon est  $\frac{36}{49}$ .

**III- (4 points)**

Hadi est un employé dans une banque.

En janvier 2018, le salaire mensuel de Hadi était **1 500 000 LL**.

Chaque mois son salaire augmente de 0,2 % et d'un supplément de 48000 LL.

Pour tout entier naturel  $n \geq 1$ , on désigne par  $a_n$  le salaire mensuel de Hadi, en millions LL, du  $n^{\text{ième}}$  mois. Ainsi  $a_1 = 1,5$ .

1) **Calculer  $a_2$ .**

2) On a, pour tout  $n \geq 1$ ,  $a_{n+1} = (1,002)a_n + 0,048$ .

a- On pose  $V_n = a_n + 24$ .

**Montrer** que  $(V_n)$  est une suite géométrique de raison **1,002** dont on déterminera le 1<sup>er</sup> terme  $V_1$ .

b- **Exprimer  $V_n$**  en fonction de  $n$ .

**Vérifier** que  $a_n = 25,5 \times (1,002)^{n-1} - 24$ , pour tout  $n \geq 1$ .

3) Hadi veut acheter **une voiture** qui coûte **25 000 000 LL**.

La banque lui propose **à partir du mois de Janvier 2018** l'offre suivante :

**Chaque mois, retirer 700 000 LL de son salaire mensuel et les placer** dans un compte d'épargne à taux d'intérêt annuel de 6 % capitalisé mensuellement.

a- **Vérifier** que la somme dans le compte de Hadi, après  $n$  mois, est exprimée par

$$\left[ 140(1,005)^n - 140 \right] \text{ millions LL pour tout } n \geq 1.$$

b- **Résoudre l'inéquation**  $140(1,005)^n - 140 \geq 25$ .

**Déterminer** le nombre minimal de mois nécessaires à Hadi pour qu'il puisse acheter cette voiture.

**IV- (8 points)**

## Partie A

Soit  $f$  la fonction définie sur  $]0; +\infty[$  par  $f(x) = \frac{1}{x} - xe^{x-1}$ .

On désigne par  $(C)$  la courbe représentative de  $f$  dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

1) Déterminer  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ .

En déduire une asymptote à  $(C)$ .

2) Déterminer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  et calculer  $f(2)$ .

3) Le tableau ci-dessous est le tableau de variations de la fonction  $f$ .

$x$	$0$	$+\infty$
$f'(x)$		—
$f(x)$		

a- **Recopier** et compléter le tableau donné.

b- **Montrer** que  $x = 1$  est l'unique solution de l'équation  $f(x) = 0$ .

4) **Tracer**  $(C)$ .

5) L'aire du domaine délimité par  $(C)$ , l'axe des abscisses et les deux droites d'équations  $x = 1$  et  $x = 2$  est égale à  $(e - \ln 2)$  unités d'aires.

- Calculer  $\int_1^2 \frac{1}{x} dx$ .

- Utiliser cette aire pour calculer la valeur exacte de  $\int_1^2 xe^{x-1} dx$ .

## Partie B

Une usine fabrique un certain détergent liquide.

Le coût marginal  $C_m$  de production de cette usine est modélisé par

$$C_m(x) = (x+1)e^{x-1}, \text{ en millions LL,}$$

où  $x$  est la quantité produite de ce détergent, en milliers de litres;  $x \in [0;5]$ .

1) Sachant que les coûts fixes de cette usine s'élèvent à **1 000 000 LL**, **montrer** que le coût total  $C_T$  de production de cette usine est modélisé par

$$C_T(x) = xe^{x-1} + 1 \text{ en millions LL.}$$

2) On désigne par  $C_M$  le coût moyen de production de cette usine.

a- **Vérifier** que  $C_M(x) - C_m(x) = f(x)$  où  $x \in ]0;5]$  et  $C_M(x)$  est en millions LL.

b- Dans cette partie, on admet que le coût moyen est minimum s'il est égal au coût marginal :  $C_{M \text{ minimal}}(x) = C_m(x)$

**Déterminer**, en litres, la quantité à produire de ce détergent pour que le coût moyen soit minimum.

3) a- Pour une certaine raison, l'usine a vendu **60 %** de sa production à **5 000 LL** le litre et **40 %** à **2 500 LL** le litre.

Sachant que toute la quantité produite de ce détergent est vendue,

**Vérifier** que le revenu en millions LL est  $R(x) = 4x$ .

b- Cette usine a produit **1 800** litres de ce détergent et a vendu les **75 %** de cette production.

**Calculer** le nombre de litres vendus par cette usine.

Est-ce-que le revenu réalisé couvre le coût de production? **Justifier.**