عدد المسائل: اربع	مسابقة في مادة الرياضيات المدة: ساعتان	الاسم: الرقم:

ملاحظة: - يسمح باستعمال آلة حاسبة غير قابلة للبرمجة او اختزان المعلومات او رسم البيانات.
- يستطيع المرشّح الإجابة بالترتيب الذي يناسبه (دون الالتزام بترتيب المسائل الواردة في المسابقة).

I- (4 points)

Chaque mois, un restaurant distribue des brochures publicitaires.

Le tableau ci-dessous représente le nombre de brochures distribuées (y_i) en milliers et le coût de distribution mensuel (x_i) en centaines de milliers LL.

Mois	Janvier 2018	Février 2018	Mars 2018	Avril 2018	Mai 2018	Juin 2018
Coût de distribution (x_i) en centaines de milliers LL	1	3,5	2	5	1,5	2,4
Nombre de brochures distribuées (y_i) en milliers.	1,2	6,4	2,6	7,2	2,1	3,2

1) Trouver les coordonnées du point moyen $G(\overline{x};\overline{y})$.
2) Représenter le nuage des points $(x_i;y_i)$ et placer le point G dans un repère orthogonal.
3) Ecrire une équation de la droite de régression $(D_{y/x})$ et tracer cette droite dans le même repère orthogonal.
4) Trouver le coefficient de corrélation r et interpréter la valeur ainsi trouvée.
5) Le modèle ci-dessus reste valable pour l'année 2018.
   La direction du restaurant reçoit une offre publicitaire pour le mois de Juillet 2018.
   Cette offre indique « 4 000 brochures distribuées pour seulement 250 000 LL ».
   Est-il plus avantageux pour la direction de prendre l'offre ou de rester sur le modèle donné ? Justifier.

II- (4 points)

En 2017, les élèves de la troisième année secondaire d'une certaine école sont répartis comme suit:

- 50 % des élèves sont de la section SE parmi lesquels 60 % ont réussi à l'examen officiel.
- 10 % des élèves sont de la section SG parmi lesquels 80 % ont réussi à l'examen officiel.
- 40 % des élèves sont de la section SV.
- 60 % des élèves ont réussi à l'examen officiel.

Partie A

On choisit un élève au hasard de la troisième année secondaire de cette école.

Considérons les évènements suivants :

E : « l'élève choisi est de la section SE », G : « l'élève choisi est de la section SG »,
V : « l'élève choisi est de la section SV », R : « l'élève choisi a réussi à l'examen officiel ».

1) a- Calculer les probabilités $P(E \cap R)$ et $P(G \cap R)$.
   b- Prouver que $P(V \cap R) = 0,22$.
2) L'élève choisi a réussi à l'examen officiel. Calculer la probabilité que cet élève soit de la section SV.

Partie B

En 2017, il y a 50 élèves en troisième année secondaire dans cette école.

Un logiciel a choisi simultanément et au hasard les noms de 3 élèves de ces 50 élèves.

1) Vérifier que 30 élèves de cette école ont réussi à l'examen officiel.
2) Soit X la variable aléatoire égale au nombre des élèves qui ont réussi à l'examen officiel parmi les trois noms choisis des élèves.
   a- Calculer $P(X = 1)$.
   b- Calculer la probabilité de choisir au moins un nom d'élève qui a réussi à l'examen officiel.

III- (4 points)
Au début de l’année 2015, Nabil dépose, dans une banque, une somme de 60 millions LL, à un taux d’intérêt annuel de 6 % capitalisé annuellement.
Au début de chaque année, après la capitalisation des intérêts, Nabil ajoute une somme de 3 000 000 LL au même compte.
Pour tout entier naturel n, on note S_n la somme obtenue, en millions LL, dans le compte de Nabil à la fin de l’année (2015 + n), alors on a : $S_0 = 60$ et $S_{n+1} = 1,06S_n + 3$.

1) Calculer le montant que Nabil aura dans son compte à la fin de l’année 2016.
2) Pour tout entier naturel n, soit (V_n) la suite définie par $V_n = S_n + 50$.
   a- Montrer que (V_n) est une suite géométrique dont on déterminera la raison q et le premier terme V_0.
   b- Montrer que $S_n = 110 \times (1,06)^n - 50$ pour tout entier naturel n.
   c- Montrer que la suite (S_n) est strictement croissante.
3) Calculer la somme d’argent obtenue dans le compte de Nabil à la fin de l’année 2020.
4) Nabil veut acheter un terrain qui coûte 90 millions LL.
   En quelle année Nabil pourra-t-il, pour la première fois, acheter ce terrain ? Justifier.

IV-(8 points)
On considère la fonction f définie sur l'intervalle $I = [1;+\infty[$ par $f(x) = (10x - 10)e^{-x}$ et on désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

Partie A

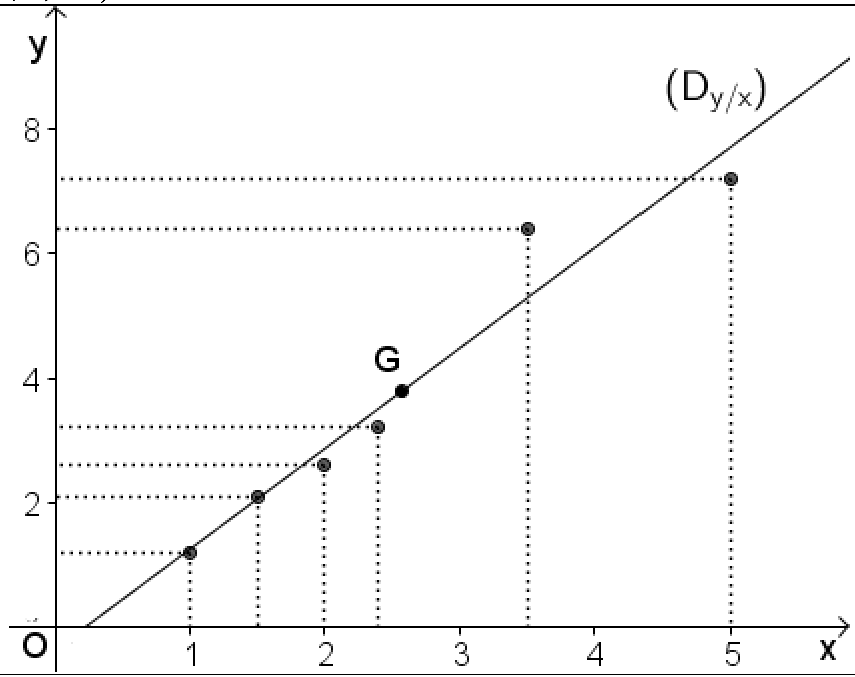
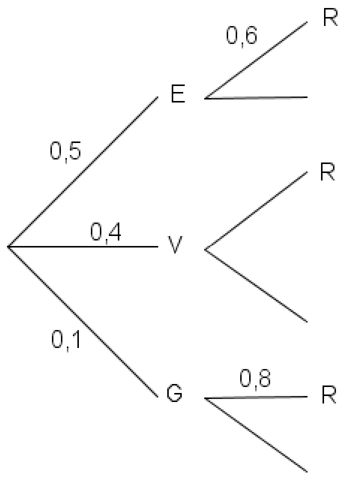
1) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et déduire une asymptote à (C).
2) Montrer que $f'(x) = 10(-x+2)e^{-x}$ et dresser le tableau de variations de f.
3) Tracer (C).
4) La fonction F définie sur I par $F(x) = -10\,x\,e^{-x}$ est une primitive de f.
   Calculer l’aire du domaine limité par la courbe (C), l’axe des abscisses et les deux droites d’équations $x = 2$ et $x = 4$.

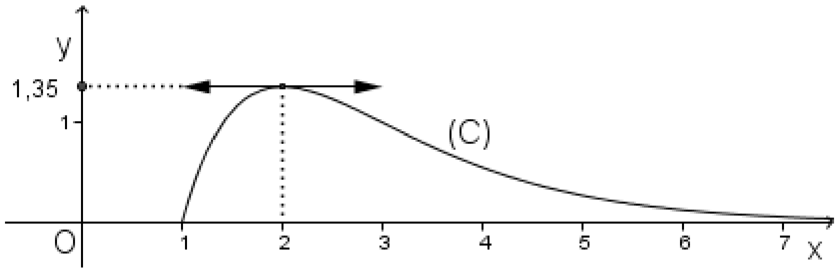
Partie B
Une entreprise fabrique un certain type d’objet.
La fonction de la demande f et la fonction de l’offre g, définies sur l'intervalle $J = [2;10]$, sont modélisées respectivement par $f(x) = (10x - 10)e^{-x}$ et $g(x) = e^{x-4}$ où f(x) et g(x) sont exprimées en milliers d’objets

et x est le prix unitaire en millions LL. *(Le prix unitaire est le prix de 1 000 objets).*

1) Calculer le nombre d’objets demandés pour un prix unitaire de 3 000 000 LL.
2) Déterminer le prix unitaire pour une offre de 1 000 objets.
3) L’équation $f(x) = g(x)$ admet sur J une solution unique α. On suppose que $\alpha = 3,635$.
   a- Donner une interprétation économique de α et calculer le nombre d’objets correspondants.
   b- Calculer, en LL, le revenu correspondant à la valeur de α donnée ci-dessus.
4) On désigne par E(x) l’élasticité de la demande par rapport au prix unitaire x.
   a- Montrer que $E(x) = \dfrac{-x^2 + 2x}{x - 1}$.
   b- A partir d’un prix unitaire x_0 en millions LL, si ce prix augmente de 1 % alors la demande diminue de 1,5 %. Calculer x_0.

أسس تصحيح مسابقة الرياضيات

Q.I	Eléments de réponses	4 pts
1	G(2,566 ; 3,783)	1
2		1,5
3	y = 1,618x – 0,369	1,5
4	r = 0,971 forte corrélation linéaire positive.	1
5	x = 2,5 donc y = 3,676 (milliers de brochures) c'est-à-dire 3 676 brochures < 4 000 brochures. Donc l'offre est la plus avantageuse. **Ou** y = 4 donc x = 2,70024 (en centaines de milliers). Or 270 024 LL > 250 000 LL. C'est à dire l'offre est la plus avantageuse.	2
Q.II	**Eléments de réponses**	**4 pts**
		
A.1.a	$P(E \cap R) = 0{,}5 \times 0{,}6 = 0{,}3$ $P(G \cap R) = 0{,}1 \times 0{,}8 = 0{,}08$	2
A.1.b	$P(V \cap R) = P(R) - P(E \cap R) - P(G \cap R) = 0{,}6 - 0{,}3 - 0{,}08 = 0{,}22$	1,5
A.2	$P(V/R) = \frac{P(V \cap R)}{P(R)} = \frac{0{,}22}{0{,}6} = \frac{11}{30} = 0{,}366$	1
B.1	$50 \times 0{,}6 = 30$	0,5
B.2.a	$P(X = 1) = \frac{C_{30}^{1} \times C_{20}^{2}}{C_{50}^{3}} = \frac{57}{196} = 0{,}2908$	1
B.2.b	$P = 1 - P(X = 0) = 1 - \frac{C_{20}^{3}}{C_{50}^{3}} = \frac{923}{980} = 0{,}9418$	1

<table>
<tr><th>Q.III</th><th>Eléments de réponses</th><th>4 pts</th></tr>
<tr><td>1</td><td>$S_1 = 1{,}06S_0 + 3 = 1{,}06(60) + 3 = 66{,}6$.
Le compte de Nabil à la fin de l'année 2016 est 66 600 000 LL.</td><td>1</td></tr>
<tr><td>2.a</td><td>$V_{n+1} = S_{n+1} + 50 = 1{,}06S_n + 53$
$\dfrac{V_{n+1}}{V_n} = \dfrac{1{,}06S_n + 53}{S_n + 50} = \dfrac{1{,}06(S_n + 50)}{S_n + 50} = 1{,}06$
Donc (V_n) est une suite géométrique de raison 1,06 et de premier terme $V_0 = 110$.</td><td>1,5</td></tr>
<tr><td>2.b</td><td>$V_n = 110(1{,}06)^n$ donc $S_n = V_n - 50 = 110 \times (1{,}06)^n - 50$</td><td>1,5</td></tr>
<tr><td>2.c</td><td>$S_{n+1} - S_n = 110 \times (1{,}06)^{n+1} - 110 \times (1{,}06)^n = 110(1{,}06)^n(0{,}06) > 0$.
Donc la suite (S_n) est strictement croissante.</td><td>1</td></tr>
<tr><td>3</td><td>$S_5 = 110 \times (1{,}06)^5 - 50 = 97{,}204813$
Le compte de Nabil à la fin de l'année 2020 sera 97 204 813 LL.</td><td>1</td></tr>
<tr><td>4</td><td>$S_n > 90$ donc $110 \times (1{,}06)^n - 50 > 90$ alors $110 \times (1{,}06)^n > 140$ donc $(1{,}06)^n > \dfrac{14}{11}$
alors $n > 4{,}1$ d'où $n = 5$ et par suite Nabil pourra acheter, pour la première fois, le terrain en 2020.
Ou $S_4 = 88{,}8724 < 90 < S_5 = 97{,}204813$ avec (S_n) est une suite st. croissante d'où $n = 5$ et par suite Nabil pourra acheter, pour la première fois, le terrain en 2020.</td><td>1</td></tr>
<tr><th>Q.IV</th><th>Eléments de réponses</th><th>8 pts</th></tr>
<tr><td>A.1</td><td>$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (10x - 10)e^{-x} = \lim\limits_{x\to+\infty} (10xe^{-x} - 10e^{-x}) = 0$.
Donc x'x est une asymptote à (C) en $+\infty$.</td><td>2</td></tr>
<tr><td>A.2</td><td>$f'(x) = 10(-x + 2)e^{-x}$
$\begin{array}{c|ccccc} x & 1 & & 2 & & +\infty \\ \hline f'(x) & & + & 0 & - & \\ \hline f(x) & 0 & \nearrow & 1{,}35 & \searrow & 0 \end{array}$</td><td>2,5</td></tr>
<tr><td>A.3</td><td>
</td><td>1,5</td></tr>
<tr><td>A.4</td><td>Aire = $\int_2^4 f(x)dx = [F(x)]_2^4 = -10(4e^{-4} - 2e^{-2}) = 1{,}97$ (unité)^2.</td><td>1</td></tr>
<tr><td>B.1</td><td>$x = 3$ donc $f(3) = 0{,}995$ alors 995 objets.</td><td>1</td></tr>
<tr><td>B.2</td><td>$g(x) = 1$ donc $e^{x-4} = 1$ donc $x = 4$ alors 4 000 000 LL.</td><td>1</td></tr>
<tr><td>B.3.a</td><td>α est le prix d'équilibre en million LL donc 3 635 000 LL.
$f(\alpha) = f(3{,}635) = 0{,}695$ donc 695 objets.</td><td>2</td></tr>
<tr><td>B.3.b</td><td>$R(\alpha) = \alpha f(\alpha) = 2{,}526325$ en million LL donc 2 526 325 LL.</td><td>1</td></tr>
<tr><td>B.4.a</td><td>$E(x) = x\,\dfrac{f'(x)}{f(x)} = \dfrac{-x^2+2x}{x-1}$</td><td>1</td></tr>
<tr><td>B.4.b</td><td>$E(x) = -1{,}5$ donc $-x^2 + 2x = -1{,}5(x - 1)$ donc $-x^2 + 3{,}5x - 1{,}5 = 0$ donc $x = 3$ acc.
ou $x = 0{,}5 < 2$ à rejeter.</td><td>1</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>