

عدد المسائل: ست	مسابقة في مادة الرياضيات المدة: أربع ساعات	الاسم: الرقم:
-----------------	---	------------------

ملاحظة: يسمح باستعمال آلة حاسبة غير قابلة للبرمجة او اختزان المعلومات او رسم البيانات.
يستطيع المرشح الإجابة بالترتيب الذي يناسبه (دون الالتزام بترتيب المسائل الوارد في المسابقة)

I – (1,5 points)

Dans le tableau suivant, une seule des réponses proposées à chaque question est correcte.
Ecrire le numéro de chaque question et donner, **en justifiant**, la réponse qui lui correspond.

N°	Questions	Réponses			
		a	b	c	d
1	$z = -2e^{-i\frac{\pi}{6}}$. Un argument de z est :	$-\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{6}$
2	$\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{12} =$	1	$2\sqrt{2}$	2^6	-1
3	$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n =$	2^n	n!	n^2	2n
4	a est un entier naturel. Soit les propositions : p : a est pair. q : a ≥ 20. La proposition $\neg (p \wedge q)$ est :	a est impair et a < 20	a est impair et a ≥ 20	a est impair ou a < 20	a est pair ou a < 20
5	si $F(x) = \int_1^x \sqrt{1+t^2} dt$, alors $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{F(x)}{x-1} =$	1	0	$\sqrt{2}$	$+\infty$

II- (2,5points)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on donne le plan (P) d'équation $2x + y - 2z - 2 = 0$ et les points A $(-1 ; 1 ; 3)$, B $(1 ; 2 ; 1)$ et C $(0 ; 4 ; 1)$.

- 1) Montrer que la droite (AB) est perpendiculaire en B au plan (P).
- 2) Soit (T) le cercle dans le plan (P) de centre B et de rayon $\sqrt{5}$.
Montrer que le point C appartient à (T).
- 3) Ecrire une équation du plan (Q) déterminé par A, B et C.
- 4) On désigne par (d) la droite perpendiculaire en C au plan (Q).
 - a- Donner un système d'équations paramétriques de (d).
 - b- Calculer la distance de A à (d).
 - c- Démontrer que la droite (d) est tangente au cercle (T).

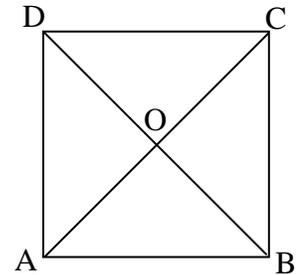
III- (3 points)

Dans un plan orienté on donne un carré direct ABCD

de centre O tel que $(\vec{AB}, \vec{AD}) = \frac{\pi}{2} (2\pi)$.

Soit r la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$ et

h l'homothétie de centre C et de rapport 2 et on désigne par S la transformation $r \circ h$.



- 1) Déterminer la nature de S et préciser son rapport et son angle.
- 2) On désigne par W le centre de S.
 - a- Montrer que $S(C) = D$ et que $S(O) = B$.
 - b- Donner une construction du point W et préciser les étapes de cette construction.
- 3) Le plan est rapporté au repère orthonormé $(A ; \vec{AB}, \vec{AD})$.
 - a- Ecrire la forme complexe de S et déduire l'affixe du centre W.
 - b- Déterminer le transformé par S du carré ABCD.

IV- (2 points)

Une urne contient **dix** boules : **cinq** boules blanches, **deux** rouges et **trois** vertes.

1) On tire simultanément et au hasard **trois** boules de cette urne.

Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :

A : « **tirer trois boules de la même couleur** »

B : « **tirer au moins une boule rouge** »

2) On tire au hasard et successivement **deux** boules de la façon suivante :

On tire une première boule ; si elle est blanche on la remet dans l'urne et on en tire une seconde boule.

Si elle n'est pas blanche, on la garde à l'extérieur de l'urne et on tire une seconde boule. On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches tirées.

a- Montrer que $P(X = 1) = \frac{19}{36}$.

b- Déterminer la loi de probabilité de X.

V- (3,5 points)

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on considère le point $F(-2; 0)$ et la droite (d) d'équation $x = 1$.

Soit (C) un cercle variable de centre M tel que :

- La droite (d) est tangente en M' à (C).
- (FT) est tangente à (C) en T.
- L'angle TFM reste égale à 30° .

1) Démontrer que $\frac{MF}{MM'} = 2$ et déduire que

M décrit une conique (H) dont on précisera la nature, le foyer, la directrice et l'excentricité.

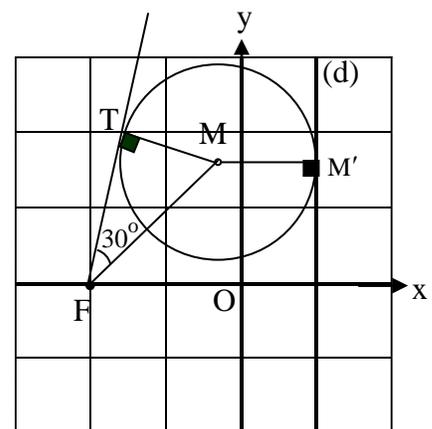
2) Vérifier que les points O et A (4 ; 0) sont les sommets de (H) et en déduire le centre et le second foyer de (H).

3) a- Ecrire une équation de (H) et déterminer ses asymptotes.

b- Vérifier que le point B (6 ; 6) est un point de (H) et écrire une équation de la tangente (Δ) en B à (H).

c- Tracer (Δ) et (H).

4) Soit (D) le domaine limité par la conique (H), la tangente (Δ) et la droite d'équation $x = 4$. Calculer le volume engendré par la rotation de (D) autour de l'axe des abscisses.



VI- (7,5 points)

A- Soit g la fonction définie sur \mathbb{R} par $g(x) = 3x + \sqrt{9x^2 + 1}$ et (G) sa courbe représentative dans un repère orthonormé .

1) a- Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ et montrer que la droite d'équation $y = 6x$ est une asymptote à (G).

b- Montrer que l'axe des abscisses est une asymptote à (G) en $-\infty$.

2) Vérifier que g est strictement croissante sur \mathbb{R} .

3) Tracer la courbe (G).

B- Soit f la fonction donnée par $f(x) = \ln(g(x))$ et (C) sa courbe représentative dans un autre repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1) a- Justifier que le domaine de définition de f est \mathbb{R} .

b- Calculer $f(x) + f(-x)$ et prouver que O est un centre de symétrie de (C).

2) a- Vérifier que $f'(x) = \frac{3}{\sqrt{9x^2 + 1}}$.

b- Ecrire une équation de la tangente (d) en O à (C).

c- Montrer que O est un point d'inflexion de (C).

3) a- Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et vérifier que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$.

Déduire $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$.

b- Dresser le tableau de variations de f .

4) a- Tracer la droite (d) et la courbe (C).

b- L'équation $f(x) = x$ admet trois racines dont l'une α est positive.

Montrer que $2,7 < \alpha < 2,9$.

5) a- Démontrer que la fonction f admet sur son domaine de définition une fonction réciproque h

et tracer sa courbe représentative (H) dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

b- Montrer que $h(x) = \frac{1}{6}(e^x - e^{-x})$.

6) On suppose que $\alpha = 2,8$.

Calculer l'aire des deux régions du plan limitées par les deux courbes (C) et (H).

PREMIERE SESSION 2006

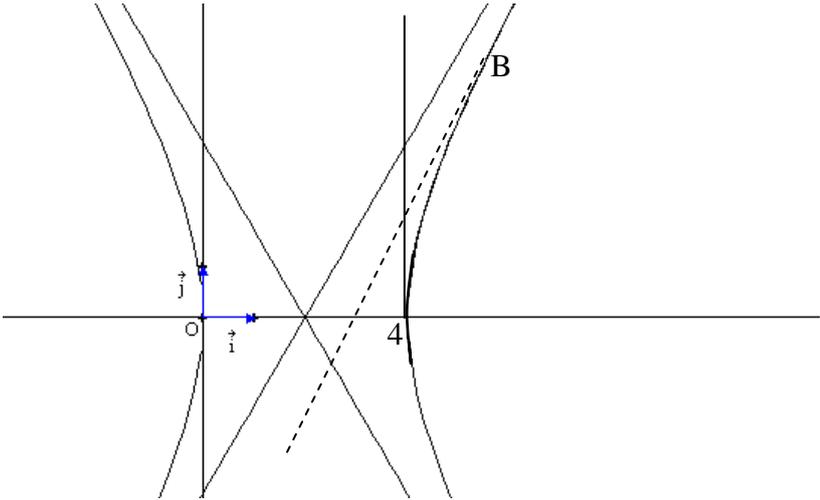
MATHEMATIQUES SG

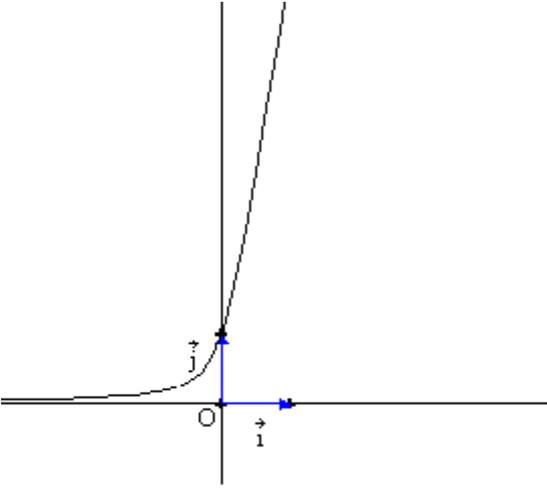
I	Eléments des réponses	Notes
1	$Z = -2 e^{-i\frac{\pi}{6}} = 2 e^{i(-\frac{\pi}{6} + \pi)} = 2 e^{i\frac{5\pi}{6}}$	d
2	$\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{12} = \left(e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^{12} = e^{i(3\pi)} = -1$	d
3	$C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^n = (1+1)^n = 2^n$	a
4	$\neg(p \wedge q)$ est équivalente à $(\neg p) \vee (\neg q)$ $\neg(p \wedge q)$: a est impair ou $a < 20$	c
5	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{F(x)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{F(x) - F(1)}{x-1} = F'(1) = f(1) = \sqrt{2}$ avec $f(x) = \sqrt{1+x^2}$. →OU : $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{F(x)}{x-1} = \frac{0}{0}$; D'après la règle de l'Hôpital ; $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{F(x)}{x-1} = F'(1) = f(1) = \sqrt{2}$	c

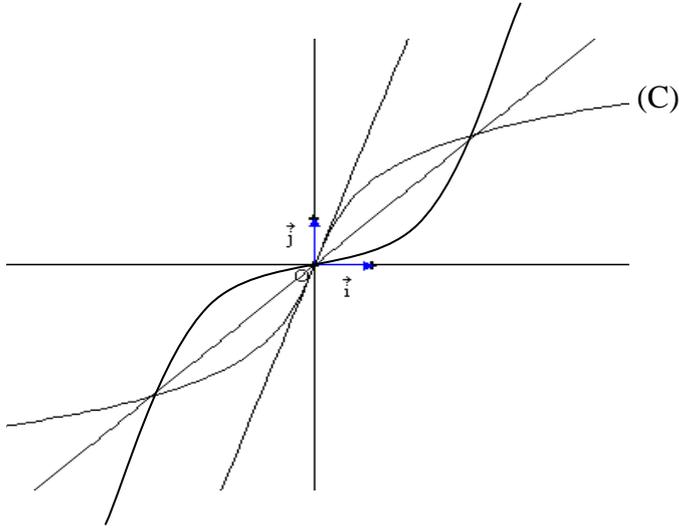
II	Eléments des réponses	Notes
1	$\vec{AB}(2; 1; -2)$, $\vec{N}_P(2; 1; -1)$ donc $\vec{AB} = \vec{N}_P$ avec B est un point de (P) car $2x_B + y_B - 2z_B - 2 = 0$	1/2
2	$C \in (P)$ car $2x_C + y_C - 2z_C - 2 = 0$; $\vec{BC}(-1; 2; 0)$; $BC = \sqrt{5} = R$ donc $C \in (T)$.	1
3	$\vec{AM} \cdot (\vec{AB} \wedge \vec{AC}) = 0$; $\begin{vmatrix} x+1 & y-1 & z-3 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 0$; (Q) : $4x + 2y + 5z - 13 = 0$.	1
4.a	$\vec{CM} = t\vec{N}_Q$; (d) : $x = 4t$, $y = 2t + 4$, $z = 5t + 1$.	1/2
4.b	(d) \perp (ABC) donc (d) \perp (AC) et $d(A; (d)) = AC = \sqrt{14}$.	1
4.c	(d) \subset (P) car $8t + 2t + 4 - 10t - 2 - 2 = 0$ (d) \perp (ABC) donc (d) \perp (BC) (OU $\vec{V}_d \cdot \vec{BC} = 0$) d'où (d) est tangente à (T).	1

III	Eléments des réponses		Notes
1	$S = r \circ h$ S est la composée d'une homothétie positive (de rapport 2) et d'une rotation (d'angle $\frac{\pi}{2}$), c'est donc une similitude de rapport 2 et d'angle $\frac{\pi}{2}$.		1
2.a	$S(C) = r \circ h(C) = r(h(C)) = r(C) = D$; $S(O) = r \circ h(O) = r(A) = B$.		1
2.b	$(\vec{WC}, \vec{WD}) = \frac{\pi}{2}$ et $(\vec{WO}, \vec{WB}) = \frac{\pi}{2}$ d'où W est un point commun aux deux cercles de diamètres respectifs $[DC]$ et $[OB]$; ces deux cercles ont en commun deux points dont l'un d'eux est O , or $S(O) \neq O$ onc le centre W est le second point.		1 ½
3.a	$z' = az + b$ avec $a = 2e^{i\frac{\pi}{2}} = 2i$; $z' = 2iz + b$ or $S(C) = D$ donc $z_D = 2iz_C + b$; $i = 2i(1+i) + b$; $b = -i + 2$ d'où $z' = 2iz + 2 - i$. $z_W = 2iz_W + 2 - i$; $z_W = \frac{2-i}{1-2i} = \frac{4}{5} + \frac{3}{5}i$.		1 ½
3.b	$S(C) = D$ et $S(O) = B$. Le transformé du carré $ABCD$ est le carré direct de centre B et dont l'un des sommets est D . → OU : $S(A) = A'$ avec $z_{A'} = 2 - i$; $S(B) = B'$ avec $z_{B'} = 2 + i$ $S(C) = D$ et $S(D) = D'$ avec $z_{D'} = -i$. le transformé de $ABCD$ est $A' B' D D'$.		1

IV	Eléments des réponses		Notes								
1	$P(A) = P(BBB) + P(VVV) = \frac{C_5^3 + C_3^3}{C_{10}^3} = \frac{11}{120}$. $P(B) = P(R \bar{R} \bar{R}) + P(RR \bar{R}) = \frac{C_2^1 \cdot C_8^2 + C_2^2 \cdot C_8^1}{C_{10}^3} = \frac{64}{120} = \frac{8}{15}$. → OU : $P(B) = 1 - P(\bar{R} \bar{R} \bar{R}) = 1 - \frac{C_8^3}{C_{10}^3} = 1 - \frac{56}{120} = \frac{8}{15}$.		1 ½								
2.a	$P(X = 1) = p(B \cap \bar{B}) + p(\bar{B} \cap B) = \frac{1}{4} + \frac{5}{18} = \frac{19}{36}$		1								
2.b	<table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <thead> <tr> <th>x_i</th> <th>0</th> <th>1</th> <th>2</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>p_i</td> <td>$\frac{4}{18} = \frac{8}{36}$</td> <td>$\frac{19}{36}$</td> <td>$\frac{1}{4} = \frac{9}{36}$</td> </tr> </tbody> </table>		x_i	0	1	2	p_i	$\frac{4}{18} = \frac{8}{36}$	$\frac{19}{36}$	$\frac{1}{4} = \frac{9}{36}$	1 ½
x_i	0	1	2								
p_i	$\frac{4}{18} = \frac{8}{36}$	$\frac{19}{36}$	$\frac{1}{4} = \frac{9}{36}$								

VI	Eléments des réponses	Notes
1	$\frac{MF}{MM'} = \frac{MF}{MT}$; le triangle MTF est semi-équilatéral donc $\frac{MF}{MT} = \frac{1}{\sin \hat{F}} = \frac{1}{1/2} = 2$, d'où $\frac{MF}{MM'} = 2$ et M décrit l'hyperbole (H) de foyer F , de directrice (d) et d'excentricité 2.	1 ½
2.a	(OF) est l'axe focal ; $\frac{OF}{OK} = \frac{AF}{AK} = 2$ (K : intersection de (d) avec x'x) donc O et A sont les sommets de (H). Le centre I est le milieu de [OA] d'où I(2 ; 0) . I est le milieu de [FF'] d'où F'(6 ; 0).	1 ½
3.a	$M(x ; y)$, $M'(1 ; y)$, $F(-2 ; 0)$ $M \in (H)$ ssi $\frac{MF}{MM'} = 2$; $MF^2 = 4 MM'^2$; $(x+2)^2 + y^2 = 4(x-1)^2$; $3x^2 - y^2 - 12x = 0$ →OU : $2a = OA = 4$; $a = 2$; $2c = FF' = 8$; $c = 4$ donc $b^2 = c^2 - a^2 = 12$ I(2 ; 0) est le centre de (H), donc (H) : $\frac{(x-2)^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$ Asymptotes : $\frac{(x-2)^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 0$; $y = \sqrt{3}(x-2)$ ou $y = -\sqrt{3}(x-2)$.	1
3.b	Pour $x = 6$ et $y = 6$ on a $\frac{(6-2)^2}{4} - \frac{6^2}{12} = 1$, d'où B est un point de (H). Equation de (Δ) : $\frac{(x-2)(x_B-2)}{4} - \frac{yy_B}{12} = 1$; $y = 2x - 6$. →OU : $6x - 2yy' - 12 = 0$; $y' = \frac{3(x-2)}{y}$; $y'_B = 2$; $y - y_B = 2(x - x_B)$; $y = 2x - 6$.	1
3c		1
4	$V = \pi \int_4^6 [4(x-3)^2 - (3x^2 - 12x)] dx = \pi \left[\frac{4}{3}(x-3)^3 - x^3 + 6x^2 \right]_4^6 = \frac{8\pi}{3} u^3.$	1

VI	Eléments des réponses	Notes
A.1.a	$g(x) = 3x + \sqrt{9x^2 + 1}$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty ; \text{ lorsque } x \rightarrow +\infty, g(x) \text{ se comporte comme } y = 3x + 3 x \text{ c.à.d.}$ $y = 6x \text{ donc la droite d'équation } y = 6x \text{ est une asymptote à (G).}$ <p>→OU : $\lim_{x \rightarrow +\infty} (g(x) - 6x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{9x^2 + 1} - 3x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{9x^2 + 1 - 9x^2}{\sqrt{9x^2 + 1} + 3x} = 0.$</p>	1
A.1.b	$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(3x + \sqrt{9x^2 + 1})(3x - \sqrt{9x^2 + 1})}{3x - \sqrt{9x^2 + 1}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-1}{3x - \sqrt{9x^2 + 1}} = 0.$ <p>D'où l'axe des abscisses est une asymptote à (G).</p> <p>→OU : lorsque $x \rightarrow -\infty$, $g(x)$ se comporte comme $y = 3x + 3 x$ c.à.d. $y = 0$</p>	1
A.2	$g'(x) = 3 + \frac{9x}{\sqrt{9x^2 + 1}}$ $g'(x) = 0 \text{ pour } \frac{9x}{\sqrt{9x^2 + 1}} = -3 \text{ c.à.d. } 81x^2 = 9(9x^2 + 1) \text{ avec } x \leq 0, \text{ soit } 0 = 9$ <p>ce qui est impossible.</p> <p>$g'(x)$ est continue sur \mathbb{R} et ne s'annulant pas, garde un signe constant celui de $g'(0) = 3$, donc $g'(x) > 0$ pour tout réel x.</p> <p>→OU : pour $x \geq 0$, $g'(x) > 0$</p> <p>pour $x < 0$, supposons que $g'(x) > 0$; $\frac{9x}{\sqrt{9x^2 + 1}} > -3$; $\frac{81x^2}{9x^2 + 1} < 9$; $0 < 9$ (vrai)</p> <p>d'où $g'(x) > 0$ pour tout réel x et g est strictement croissante.</p>	1
A.3		1
B.1.a	$g(x) > 0$ pour tout x car (G) est au-dessus de l'axe des abscisses d'où f est définie sur \mathbb{R} .	1/2
B.1.b	$f(x) + f(-x) = \ln(3x + \sqrt{9x^2 + 1}) + \ln(-3x + \sqrt{9x^2 + 1})$ $= \ln(9x^2 + 1 - 9x^2) = \ln 1 = 0.$ <p>$f(-x) = -f(x)$ d'où f est impaire et O est un centre de symétrie de (C).</p>	1
B.2.a	$f'(x) = \frac{g'(x)}{g(x)} = \frac{3\sqrt{9x^2 + 1} + 9x}{\sqrt{9x^2 + 1}} \times \frac{1}{3x + \sqrt{9x^2 + 1}} = \frac{3}{\sqrt{9x^2 + 1}}.$	1/2

B.2.b	$y = x f'(0) = 3x$	1/2												
B.2.c	$f''(x) = \frac{-27x}{(9x^2 + 1)\sqrt{9x^2 + 1}}$; $f''(x)$ s'annule pour $x = 0$ en changeant de signe, O est un point d'inflexion de (C).	1												
B.3.a	$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ln(+\infty) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{\sqrt{9x^2 + 1}} = 0$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ car O est un centre de symétrie de (C).	1												
B.3.b	$f'(x) > 0$ <table style="margin-left: 20px;"> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 5px;">x</td> <td style="padding-right: 20px;">$-\infty$</td> <td style="padding-right: 20px;">$+\infty$</td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 5px;">f'(x)</td> <td colspan="2" style="text-align: center;">+</td> </tr> </table> <table style="margin-left: 20px;"> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 5px;">f(x)</td> <td style="text-align: center;">↗</td> <td style="padding-left: 20px;">$+\infty$</td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 5px;"></td> <td style="text-align: center;">$-\infty$</td> <td></td> </tr> </table>	x	$-\infty$	$+\infty$	f'(x)	+		f(x)	↗	$+\infty$		$-\infty$		1/2
x	$-\infty$	$+\infty$												
f'(x)	+													
f(x)	↗	$+\infty$												
	$-\infty$													
4.a		1 1/2												
4.b	$f(2,7) = 2,78 > 2,7$ et $f(2,9) = 2,85 < 2,9$ donc $2,7 < \alpha < 2,9$ car f est continue et strictement croissante sur \mathbb{R} .	1												
B.5.a	f est continue et strictement croissante sur \mathbb{R} , elle admet une fonction réciproque h .	1												
B.5.b	$6y = e^x - \frac{1}{e^x}$; $e^{2x} - 6ye^x - 1 = 0$; $(e^x - 3y)^2 = 9y^2 + 1$; $e^x = 3y + \sqrt{9y^2 + 1} (> 0)$ ou $e^x = 3y - \sqrt{9y^2 + 1} < 0$ (impossible) ; $x = \ln(3y + \sqrt{9y^2 + 1}) = f(y)$	1												
6.	$A = 4$ (aire comprise entre (H) et les droites d'équations $y = x$, $x = 0$ et $x = \alpha$). $A = 4 \int_0^{2,8} \left[x - \frac{1}{6}(e^x - e^{-x}) \right] dx = 4 \left[\frac{x^2}{2} - \frac{1}{6}(e^x + e^{-x}) \right]_0^{2,8}$ $= 4 \left[\frac{(2,8)^2}{2} - \frac{1}{6}(e^{2,8} + e^{-2,8}) + \frac{1}{3} \right] \cong 6,009 \text{ u}^2 .$	1 1/2												