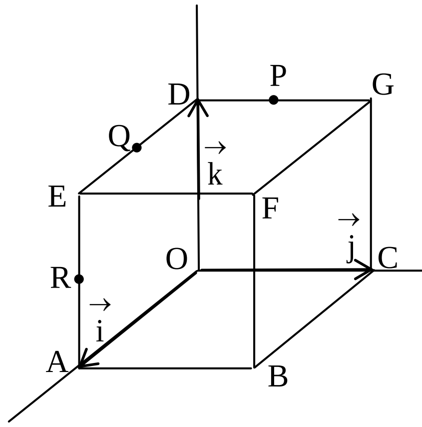
وزارة التربية والتعليم العالي المديرية العامة للتربية دائرة الامتحانات	امتحانات الشهادة الثانوية العامة فرع علوم الحياة	دورة سنة ٢٠٠٤ الاستثنائية
عدد المسائل:اربع	مسابقة في الرياضيات المدة : ساعتان	الاسم : الرقم :

ملاحظـــة: يُسمح بإستعمال آلة حاسبة غير قابلة للبرمجة أو إختزان المعلومات أو رسم البيانات.
يستطيع المرشح الإجابة بالترتيب الذي يناسبه (دون الالتزام بترتيب المسائل الوارد في المسابقة).

I- (3,5 points).

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$, on donne les points A , B et M d'affixes respectives -1 , 4 et z , et soit M' le point d'affixe z' tel que $z' = \dfrac{z-4}{z+1}$ $(z \neq -1)$.

1) Dans le cas où $z = 1+i$, écrire z' sous forme algébrique et donner sa forme exponentielle .
2) Déterminer les valeurs de z lorsque $z' = z$.
3) a- Donner une interprétation géométrique de $|z+1|$ et de $|z-4|$.
   b- Sur quelle ligne se déplace le point M lorsque $|z'| = 1$?



II- (3,5 points).

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$,on donne le cube OABCDEFG tel que : A(1 ; 0 ; 0) , B(1 ; 1 ; 0) et F (1 ; 1 ; 1) .
On désigne par P, Q et R les milieux respectifs des segments [DG] , [DE] et [AE] .

1) a- Montrer que $2x + 2y + 2z - 3 = 0$ est une équation du plan (PQR).
   b- Démontrer que le plan (PQR) passe par le milieu de [AB] .
   c- Démontrer que les plans (PQR) et (BEG) sont parallèles .

2) a- Quelle est la nature du quadrilatère EGCA ?
   b- Soit M un point variable de la droite (AC) .
   Montrer que $\overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{GF}$.

III-(4 points).

Un test à choix multiple est constitué de **trois** questions indépendantes ; le
candidat doit répondre à toutes les questions.
Pour chacune des questions deux réponses sont proposées dont une seule est juste.

Un candidat répond au hasard à chacune de ces trois questions .

1) a- Montrer que la probabilité qu'il donne des réponses justes aux trois questions est
égale à $\frac{1}{8}$.

b- Soit l'événement E : « parmi les trois réponses du candidat il y a exactement deux
réponses justes » .
Calculer la probabilité de E.

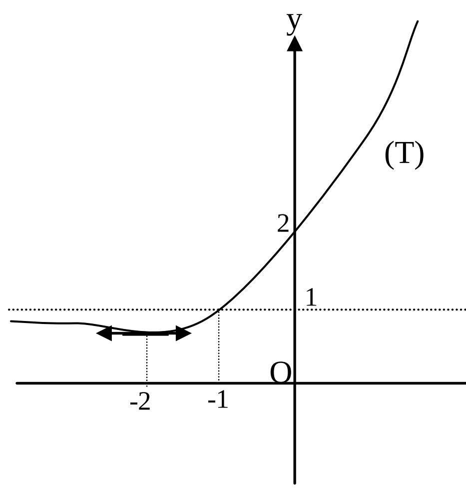
2) Le barème attribue **+5** points à chaque réponse juste et **-3** points à chaque réponse non
juste .
On désigne par X la variable aléatoire égale à la note globale obtenue par le candidat sur ce test.
a- Déterminer les 4 valeurs possibles de X .
b- Déterminer la loi de probabilité de X et calculer l'espérance mathématique E (X).

IV-(9 points).

Soit l'équation différentielle (E) : y'' – 2y' + y = x +1.

1) On pose y = z + x + 3 .
a- Ecrire une équation différentielle (E') satisfaite par z et résoudre (E') .
b- Déduire la solution générale de (E).

2) Soit f une solution particulière de (E) .
La courbe (T) ci-contre est
la courbe représentative de
la fonction f ' **dérivée** de f .
Montrer que $f(x) = xe^{x} + x + 3$.



On désigne par (C) ***la courbe représentative***

de la fonction f ***dans un repère orthonormé*** $(O; \vec{i}, \vec{j})$; ***unité 2cm*** .

3) a- Calculer f(1) et $\lim_{x \to +\infty} f(x)$.

b- Calculer $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ et démontrer que la droite (d) d'équation y = x + 3 est une asymptote à (C) .

c- Déterminer , suivant les valeurs de x, les positions relatives de (C) et (d).

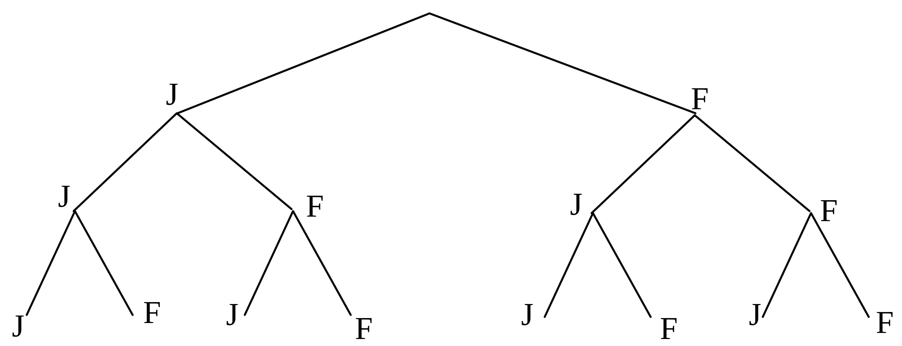
d -Vérifier que I (-2 ; $1 - \frac{2}{e^2}$) est un point d'inflexion de la courbe (C) .

4) a- Vérifier que f est strictement croissante sur IR et dresser son tableau de variations.

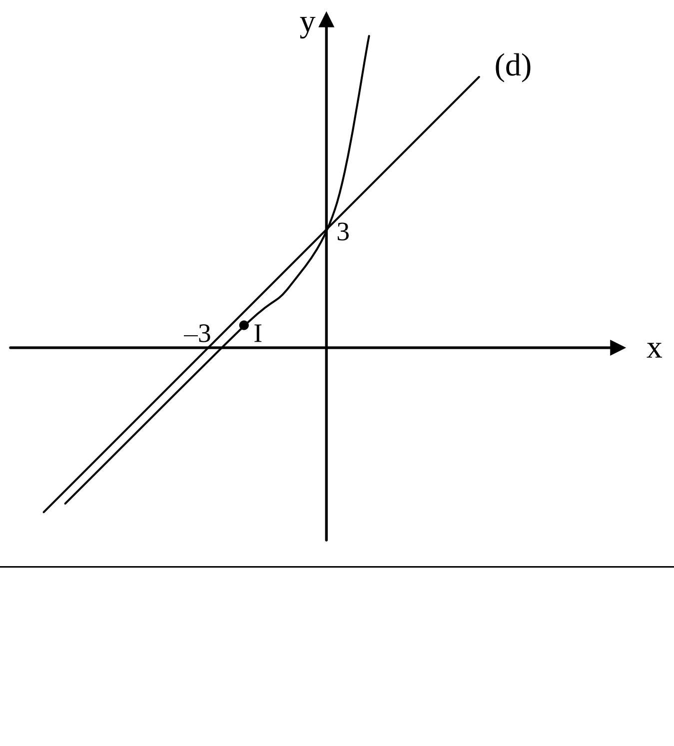
b-Tracer (d) et (C).

c- Calculer ,en cm^2, l'aire du domaine limité par la courbe (C), la droite (d) et les droites d'équations x = 0 et x = 1 .

Réponses

<table>
<tr><td colspan="2">Sciences de la vie</td><td>MATH</td><td>2^{ème} Session 2004</td></tr>
<tr><td colspan="2">Questions</td><td>Eléments de réponses</td><td>N</td></tr>
<tr><td rowspan="4">I</td><td>1</td><td>$z' = \frac{1+i-4}{1+i+1} = \frac{-3+i}{2+i} = -1 + i = \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$</td><td>1 ½</td></tr>
<tr><td>2</td><td>$z' = z$; $z = \frac{z-4}{z+1}$; $z^2 = -4$; $z = -2i$ ou $z = 2i$.</td><td>½</td></tr>
<tr><td>3-a-</td><td>$|z + 1| = |z_M - z_A| = MA$; $|z - 4| = |z_M - z_B| = MB$</td><td>½</td></tr>
<tr><td>3-b-</td><td>$|z'| = \frac{MB}{MA}$; comme $|z'| = 1$ alors MB = MA.
M se déplace sur la médiatrice de [AB].</td><td>1</td></tr>
<tr><td rowspan="5">II</td><td>1-a-</td><td>P(0 ; ½ ; 1) , Q(½ ; 0 ; 1) , R(1 ; 0 ; ½)
Les coordonnées de P , Q et R vérifient l'équation 2x + 2y + 2z – 3 = 0
▶ ou : M(x ; y ; z) est un point du plan (PQR) ssi $\overrightarrow{PM}.(\overrightarrow{PQ} \wedge \overrightarrow{PR}) = 0$.</td><td>½</td></tr>
<tr><td>1-b-</td><td>I(1 ; ½ ;0) : milieu de [AB], les coordonnées de I vérifient l'équation du plan (PQR).</td><td>½</td></tr>
<tr><td>1-c-</td><td>(PQ) est parallèle à (EG) ;
(QR) est parallèle à (DA) qui est parallèle à (BG)
(PQR) contient deux droites concourantes parallèles à deux droites concourantes du plan (EBG) ; donc (PQR) et (EBG) sont parallèles.
▶ ou :x + y + z – 2 = 0 est une équation du plan (BEG) .
Les deux plans distincts (PQR) et (BEG) sont parallèles ayant deux vecteurs normaux colinéaires.</td><td>1</td></tr>
<tr><td>2-a-</td><td>$\overrightarrow{EA} = \overrightarrow{GC}$
(EA) est perpendiculaire au plan (OABC) , donc (EA) $\perp$ (AC)
EAGC est un rectangle.</td><td>½</td></tr>
<tr><td>2-b-</td><td>$\overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AM} \wedge (\overrightarrow{EG} + \overrightarrow{GF}) = \overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{EG} + \overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{GF}$
$\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{EG}$ sont colinéaires, $\overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{EG} = \overrightarrow{0}$,par suite $\overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{GF}$
▶ ou
(AC) : x = – α + 1 ; y = α , z = 0
$\overrightarrow{AM}$(-α ; α ; 0) , $\overrightarrow{EF}$ (0 ;–1 ;0) , $\overrightarrow{GF}$ (1 ;0 ;0) ; $\overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{GF} = \alpha\ \overrightarrow{k}$</td><td>1</td></tr>
<tr><td rowspan="5">III</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>1-a-</td><td>P(JJJ) = ½ × ½ ×½ = 1/8</td><td>1</td></tr>
<tr><td>1-b-</td><td>P(E) = P(JJF) + p(JFJ) + p(FJJ) = 1/8 +1/8 + 1/8 = 3/8</td><td>1</td></tr>
<tr><td>2-a-</td><td>Les quatre valeurs possibles de X sont – 9 ; – 1 ; 7 ; 15 .</td><td>½</td></tr>
<tr><td>2-b-</td><td><table><tr><td>$x = x_i$</td><td>–9</td><td>– 1</td><td>7</td><td>15</td></tr><tr><td>P_i</td><td>1/8</td><td>3/8</td><td>3/8</td><td>1/8</td></tr></table></td><td>1 ½</td></tr>
</table>

		E(X) = – 9/8 – 3/8 + 21/8 + 15/8 = 3	

IV	1-a-	$y''-2y'+y = x+1$ avec $y' = z'+1$ et $y'' = z''$ donc $z''-2z'+z = 0$. Equation caractéristique $r^2 - 2r + 1 = 0$ et $r_1 = r_2 = 1$; $z = (c_1x + c_2)e^x$.	1 ½
	1-b-	La solution générale de (E) est $y = (c_1x + c_2)e^x + x + 3$.	½
	2	D'après le graphique $f'(-1) = 1$ et $f'(0) = 2$ $f'(x) = c_1e^x + (c_1x + c_2)e^x + 1$ $f'(-1) = 1$ donne $\frac{c_2}{e} + 1 = 1$ soit $c_2 = 0$, $f'(0) = 2$ donne $c_1 + c_2 + 1 = 2$ soit $c_1 = 1$, $f(x) = xe^x + x + 3$.	1
	3-a-	f (1) = e + 4 ≈ 6 , 738 , $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.	½
	3-b-	$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} xe^x + \lim\limits_{x\to-\infty} (x+3) = 0 - \infty = -\infty$. $\lim\limits_{x\to-\infty} [f(x) - (x+3)] = \lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0$, donc la droite (d) d'équation y = x + 3 est une asymptote à (C) .	1
	3-c-	$f(x) - (x+3) = xe^x$ pour x = 0 , (C) rencontre (d) au point (0 ; 3) pour x > 0 , (C) est au-dessus de (d) pour x < 0 , (C) est au-dessous de (d) .	1
	3-d-	D'après le graphique $f''(-2) = 0$, sur]– ∞ ;–2[: f ' est décroissante donc f '' (x) < 0 sur]–2 ; +∞ [: f ' est croissante donc f '' (x) > 0 Donc le point I(–2 ;f(–2)= $1 - \frac{2}{e^2}$) est un point d'inflexion de (C).	½
	4-a-	(T) est au-dessus de l'axe des abscisses, donc f '(x) > 0 pour tout réel x et par suite f est strictement croissante sur R $\begin{array}{c\|ccc} x & -\infty & & +\infty \\ \hline f'(x) & & + & \\ \hline f(x) & -\infty & \nearrow & +\infty \end{array}$	½
	4-b-		1 ½

	4-c-	A = $\int_0^1 xe^{x}dx = (x-1)e^x \Big|_0^1 = 1\ u^2$ donc A = 4 cm^2 .	1