

ملاحظة: يُسمح باستعمال آلة حاسبة غير قابلة للبرمجة أو اختزان المعلومات أو رسم البيانات.
يستطيع المرشح الإجابة بالترتيب الذي يناسبه (دون الالتزام بترتيب المسائل الواردة في المسابقة).

I- [4 points]

Une usine fabrique un article. Le tableau suivant donne l'offre y de ce produit, en milliers des articles, en fonction du prix unitaire x en milliers de LL.

Prix x_i en milliers de LL	2	3	5	7	10
Offre y_i en milliers des articles	5	7	8	9	11

Le modèle reste valable pour un prix de 20 000 LL

- 1) Déterminer une équation de la droite de régression ($D_{y/x}$).
- 2) Estimer l'offre des articles pour un prix unitaire de 15 000 LL.
- 3) La demande est modalisée par la droite ($D_{z/x}$) d'équation $z = -0,567x + 8,266$.

Les deux droites ($D_{y/x}$) et ($D_{z/x}$) se coupent en un point I(3,158 ; 6,474).

Donner une interprétation économique aux coordonnées de ce point.

- 4) Calculer, en LL, le revenu assuré sous le prix unitaire de 7000 L.L.
- 5) Soit $e(x)$ l'élasticité de la demande par rapport au prix unitaire x .

- a) Montrer que l'élasticité de la demande est donnée par $e(x) = \frac{-567x}{-567x + 8266}$.
- b) Calculer $e(4)$. Interpréter économiquement la valeur ainsi obtenue.

II- [4 points]

Partie A

Nisrine dépose 4 000 000 L.L dans une banque à un taux d'intérêt annuel de 0,5% capitalisé annuellement. Après la capitalisation des intérêts, Nisrine ajoute, annuellement, une somme de 200 000 LL à son compte.

Soit V_n le compte de Nisrine, en millions de L.L, après n années (n est un entier naturel). Ainsi $V_0 = 4$.

- 1) Justifier, pour tout entier naturel n , que $V_{n+1} = 1,005V_n + 0,2$.
- 2) Soit (W_n) la suite définie, pour tout entier naturel n , par $W_n = V_n + \alpha$.
 - a) Calculer α si (W_n) est une suite géométrique de raison 1,005.
 - b) Prends $\alpha = 40$. Exprimer W_n en fonction de n et déduire que $V_n = 44(1,005)^n - 40$.
- 3) a) Calculer le compte de Nisrine après dix ans.
b) Calculer le montant d'intérêt gagné par Nisrine durant ces dix années.
- 4) Montrer que (V_n) est une suite strictement croissante.

Partie B

À la même date où Nisrine a déposé la somme de 4 000 000 LL, Nadia a investi 8 000 000 LL dans la même banque suivant la règle : $U_{n+1} = 1,005U_n$, où U_n est le compte de Nadia, en millions de L.L, après n années (n est un entier naturel). Alors $U_0 = 8$.

- 1) Montrer que (U_n) est une suite géométrique et que $U_n = 8(1,005)^n$.
- 2) On admet que (U_n) est encore une suite strictement croissante.
Après combien d'années le compte de Nisrine dépassera celui de Nadia pour la première fois ?

III- [4 points]

Une urne U contient 4 boules blanches, 5 boules rouges et 3 boules vertes.

Partie A

On tire successivement et sans remise 3 boules de l'urne U.

- 1) Calculer la probabilité de tirer trois boules de même couleur.
- 2) Montrer que la probabilité de tirer au moins une boule verte et au moins une boule rouge parmi les trois boules tirées est $\frac{21}{44}$.

Partie B

Un joueur paie une somme de 10 000 LL pour participer dans un jeu.

Le jeu se déroule comme le suivant:

Le joueur tire au hasard et simultanément deux boules de l'urne U.

- Si toutes les deux boules tirées ne sont pas vertes, le joueur reçoit une somme de 5 000 LL et le jeu s'arrête.
- Si les deux boules tirées sont vertes, elles sont remises à l'extérieur de l'urne U et le joueur reçoit une somme de 8 000 LL.

Après-ça, deux boules sont tirées simultanément et au hasard parmi les 10 boules restantes dans l'urne U.

- Si ces deux boules tirées sont de même couleur, le joueur reçoit une somme de 12 000 LL et le jeu s'arrête ;
- Si non, le joueur reçoit une somme de 2 000 LL et le jeu s'arrête.

Soit X la variable aléatoire égal au gain algébrique du joueur (Le gain algébrique peut-être nul, positif ou négatif).

- 1) Justifier que les valeurs de X sont : -5 000 ; 0 et 10 000.
- 2) Montrer que $P(X = 0) = \frac{29}{990}$.
- 3) Déterminer la loi de probabilité de X.
- 4) Attendez-vous que ce joueur va gagner ? Justifier.

IV- [8 points]

Soit f la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = (-2x - 1)e^{-x} + 2$ et l'on désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Partie A

- 1) Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. Dédire une équation d'une asymptote à (C).
- 2) Montrer que $f'(x) = (2x - 1)e^{-x}$ et construire le tableau de variations de f.
- 3) Tracer (C) et son asymptote.
- 4) La droite (d) d'équation $y = \frac{x}{2}$ coupe la courbe (C) en un seul point d'abscisse α .

Vérifier que $3,5 < \alpha < 3,6$.

- 5) Soit F la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $F(x) = (2x + 3)e^{-x} + 2x$.

- a) Montrer que F est une primitive de f.
- b) Dédire l'aire du domaine limité par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

Partie B

Dans ce qui suit on suppose que $\alpha = 3,55$

Une usine fabrique de souvenirs. Le coût total de production de souvenirs C_T , en millions de LL, est modalisé par $C_T(x) = f(x)$ **seulement** pour tout x dans $[0,5 ; 4]$, où x , en milliers représente le nombre de souvenirs produits. ($0,5 \leq x \leq 4$).

1) Calculer, en L.L, le coût de production de 3 000 souvenirs. En déduire, dans ce cas, le coût moyen de production d'un souvenir.

2) Le tableau ci-contre est le tableau de variations de la fonction du profit P de cette usine, en millions LL, sur $[0,5 ; 4]$.

x	0,5	0,844	4
$P'(x)$		+	
$P(x)$	-1	0	2,164

a) Etudier si l'usine peut assurer un gain égal à 3 000 000 L.L.

b) Déterminer le nombre minimal de souvenirs à vendre pour que l'usine réalise un gain.

c) La fonction de profit P est définie sur $[0,5 ; 4]$ par $P(x) = x - 2 + (2x + 1)e^{-x}$.

Montrer que la fonction de revenu R , en millions LL, est modalisée par $R(x) = x$ sachant que toute la production est vendue.

d) Calculer le nombre des souvenirs à vendre pour que le revenu soit le double du coût total de production.

المادة: رياضيات – لغة فرنسية الشهادة: الثانوية العامة الفرع: الاقتصاد والاجتماع نموذج رقم: 1 / 2019 المدة: ساعتان	الهيئة الأكاديمية المشتركة قسم: الرياضيات	
---	--	--

أسس التصحيح

QI	Réponses	Notes
1	$(D_{y/x}) : y = 0,679x + 4,330$	0,5
2	Offre = $0,679(15) + 4,330 = 14,515$ en milliers des articles alors c'est 14515 articles	1,5
3	Le prix d'équilibre est 3158 L.L et la quantité d'équilibre est 6474 articles.	0,75 0,75
4	Revenu = $(7)(-0,567(7) + 8,266)(1000) = 30079$ L.L	1,5
5a	$e(x) = x \cdot \frac{z'}{z} = \frac{-567x}{-567x + 8266}$	1
5b	$e(4) = -0,378$ A partir de 4000 LL si le prix augmente de 1% la demande diminue de 0,378%	0,25 0,75

QII	Réponses	Notes
A1	$V_{n+1} = (1+0,5/100)V_n + 200000/1000000 = 1,005V_n + 0,2$	0,5
A2a	$W_{n+1} = 1,005W_n ;$ $\alpha = 40$	1
A2b	$W_n = 44(1,005)^n ;$ $V_n = 44(1,005)^n - 40$	0,25 0,25
A3a	$V_{10} = 6.250165$ donc c'est 6250165 L.L	1
A3b	$I = 6250165 - 4000000 = 2250165$ L.L	0,5
A4	$V_{n+1} - V_n = 44(1,005)^{n+1} - 44(1,005)^n = 44(1,005)^n(1,005-1)$ $= 0,22(1,005)^n > 0$ alors (V_n) est une suite strictement croissante	1,5
B1	La raison commune est 1,005 ; $U_n = U_0 \times q^n = 8(1,005)^n$	0,25 0,25
B2	$V_n > U_n$ donne $n > 21,12$ alors $n = 22$. Donc c'est après 22 ans.	1,5

QIII	Réponses	Notes
A1	$P(\text{BBBouRRR ou VVV}) = \frac{A_4^3 + A_5^3 + A_3^3}{A_{12}^3} = \frac{3}{44}$	1
A2	(2V et 1R) ou (1V et 2R) ou (1V, 1R et 1B) avec (2V et 1R) peut-être écrit comme $\frac{3!}{2!} = 3$ façons: VVR, VRV, RVV et de même pour (2R et 1V), en plus comme (1V, 1R et 1B) peut-être écrit en 3! façons, alors : $P = \frac{A_3^2 \times A_5^1 \times 3 + A_3^1 \times A_5^2 \times 3 + A_3^1 \times A_5^1 \times A_4^1 \times 3!}{A_{12}^3} = \frac{21}{44}$	1,5
B1	5000 – 10000 = -5000; toutes les deux premières boules tirées ne sont pas vertes et le jeu s'arrête. 8000 + 2000 – 10000 = 0; les 2 premières boules tirées sont vertes et les 2 deuxièmes boules tirées sont des couleurs différents. 8000 + 12000 – 10000 = 10000 ; les 2 premières boules tirées sont vertes et les 2 deuxièmes boules tirées sont de même couleur.	1
B2	$P(X = 0) = \frac{C_3^2}{C_{12}^2} \times \left(1 - \frac{C_4^2 + C_5^2}{C_{10}^2}\right) = \frac{29}{990}$. Les 2 premières boules tirées sont vertes $\frac{C_3^2}{C_{12}^2}$ et les 2 deuxièmes boules tirées des 10 sont des couleurs différents (RV, RB, BV) $\frac{C_5^1 C_1^1 + C_5^1 C_4^1 + C_4^1 C_1^1}{C_{10}^2} = \left(1 - \frac{C_4^2 + C_5^2}{C_{10}^2}\right)$ "opposé des 2 boules de même couleur"	1
B3	$P(X = -5000) = 1 - \frac{C_3^2}{C_{12}^2} = \frac{21}{22}$ $P(X = 10000) = \frac{C_3^2}{C_{12}^2} \times \frac{C_4^2 + C_5^2}{C_{10}^2} = \frac{8}{495}$ et $P(X = 0) = \frac{29}{990}$	2
B4	$EX = 0 + (-5000)(21/22) + (10000)(8/495) = -4611,11 < 0$ On s'attend donc à ce que le joueur de perde.	0,5

QIV	Réponses	Notes												
A1	$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-2xe^{-x} - e^{-x} + 2) = 2 ; y = 2 \text{ AH}$	1												
A2	$f'(x) = (-2 + 2x + 1)e^{-x} = (2x - 1)e^{-x}$ <table><tr><td>x</td><td>0</td><td>1/2</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>f'(x)</td><td>—</td><td>0</td><td>+</td></tr><tr><td>f(x)</td><td>1</td><td></td><td>$+\infty$</td></tr></table> Diagram showing a minimum at x = 0,786	x	0	1/2	$+\infty$	f'(x)	—	0	+	f(x)	1		$+\infty$	2
x	0	1/2	$+\infty$											
f'(x)	—	0	+											
f(x)	1		$+\infty$											

A3		1,5
A4	$f(3,5) = 1,758 > 3,5/2$ $f(3,6) = 1,775 < 3,5/2$ alors $3,5 < \alpha < 3,6$	1
A5a	$F'(x) = (2 - 2x - 3)e^{-x} + 2 = (-2x - 1)e^{-x} + 2 = f(x)$	1
A5b	$\text{Aire} = \int_0^1 f(x)dx = [F(x)]_0^1 = 5e^{-1} - 1 = 0.839 \text{ u}^2$	1,5
B1	$C_T(3) = 1,651490 \text{ LL}$; donc c'est 1 651 490 LL coût moyen de production d'un souvenir = $1651490/3000 \approx 550,5 \text{ LL}$	2
B2a	Suivant la tableau de variations de la fonction du profit : $2164000 < 3000000$ donc non	0,5
B2b	$P(0,844) = 0$ et P strictement croissante. Pour la production of 845 souvenirs	1,5
B2c	$R(x) = P(x) + C(x) = x$	0,5
B2d	$R(x) = 2C(x)$ donne $f(x) = x/2$ donc $x = \alpha$, alors 3550 souvenirs	1,5