

المادة: الرياضيات الشهادة: الثانوية العامة الفرع: العلوم العامة نموذج رقم 3- المدة: أربع ساعات	الهيئة الأكاديمية المشتركة قسم: الرياضيات	 المركز التربوي للبحوث والإنماء
--	--	---

نموذج مسابقة (يراعي تعليق الدروس والتوصيف المعدل للعام الدراسي ٢٠١٦-٢٠١٧ وحتى صدور المناهج المطورة)

ملاحظة: يُسمح باستعمال آلة حاسبة غير قابلة للبرمجة أو اختزان المعلومات أو رسم البيانات.
يستطيع المرشح الإجابة بالترتيب الذي يناسبه (دون الالتزام بترتيب المسائل الوارد في المسابقة).

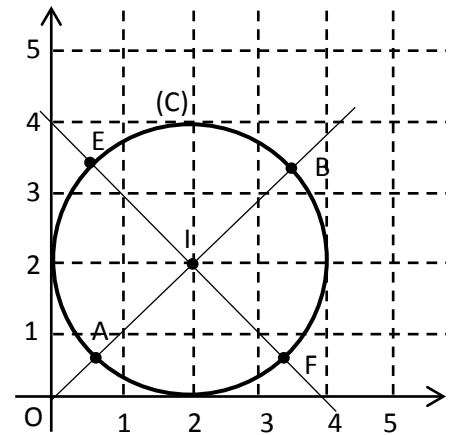
I- (2 points)

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{u}; \vec{v})$
(C) est un cercle de centre $I(2; 2)$ et de rayon 2 ;

Dans la figure ci-contre :

- (D) et (D') sont deux droites d'équations respectives:
 $y = x$ et $y = -x + 4$;
- (D) coupe (C) en A et B ;
- (D') coupe (C) en E et F.

Répondre à chacune des questions suivantes par vrai ou faux et Justifier la réponse choisie.



- 1) L'affixe de B est: $Z_B = (\sqrt{2} + 2)e^{i(\frac{\pi}{4})}$
- 2) Les affixes des points I, F et B vérifient la relation: $Z_B = i(Z_F - 2 - 2i)$.
- 3) Si S est une similitude plane directe qui transforme A en B et I en F, alors la mesure de l'angle de SoS est $\frac{\pi}{4}$.
- 4) L'ensemble des points M d'affixe z qui vérifient les deux conditions: $|z - 1| = |z - i|$ et $|z - 2 - 2i| = 2$ est le segment [AB].

II- (3 points)

Dans l'espace muni à un repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points

$$A(2;1;0) ; B(0;1;3), \text{ la droite (d): } \begin{cases} x = 4t \\ y = 2 \\ z = -3t + 3 \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}) \text{ et le plan (P): } 3x - 4z = 0$$

- 1) a. Montrer que (AB) et (d) sont non coplanaires.
b. Montrer que l'équation du plan (Q) contenant (d) et parallèle à (AB) est $y - 2 = 0$.
c. Calculer la distance de A à (Q).
- 2) a. Montrer que (P) et (Q) sont perpendiculaires et déterminer un système d'équations paramétriques de la droite(Δ) intersection de (P) et (Q).
b. Soit $S(1; 2; \frac{-3}{2})$ un point dans l'espace. Montrer que S est équidistant à (P) et (d).

III- (2 points)

Une urne contient 4 boules noires, 3 boules blanches et n boules rouges. ($n > 1$)

Partie A: Dans cette partie, on suppose que $n = 2$. On tire simultanément et au hasard 3 boules de l'urne.

- 1) Calculer la probabilité de tirer trois boules de même couleur.
- 2) Soit E l'évènement: "Des trois boules tirées, on obtient exactement deux boules de même couleur."
Montrer que $P(E)$ est égale à $\frac{55}{84}$.

Partie B: On tire simultanément et au hasard deux boules des $(n + 7)$ boules.

On note par X la variable aléatoire qui est égale au nombre des boules rouges obtenues.

Montrer que $P(X = 2) = \frac{n(n-1)}{(n+6)(n+7)}$

- 1) Déterminer la loi de probabilité de X .
- 2) Calculer n sachant que l'espérance mathématique $E(X)$ est égale à 1.

IV- (3 points)

Dans la figure ci-contre, (AE) et (BL) sont deux droites perpendiculaires tel que :

$AB = AC = 1$, $AE = AD = DF = FG = 2$.

Soit S la similitude directe du plan qui transforme A en D et C en F .

- 1) Déterminer le rapport et l'angle de S .

- 2) a- G est un point tel que $\overrightarrow{DG} = \overrightarrow{AE}$.

Montrer que $S(B) = G$.

b- Trouver $S(E)$.

- 3) Soient H et K les milieux respectifs de $[BE]$ et de $[GL]$. (AH) et (DK) se coupent en I ; (AH) et (DG) se coupent en O .

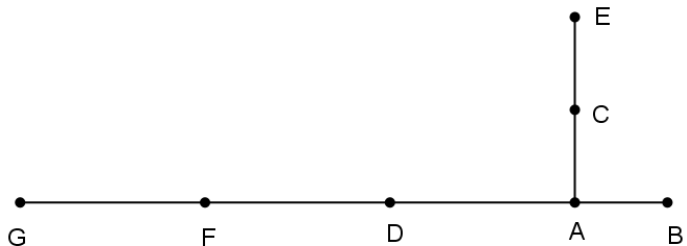
a- Montrer que $S(H) = K$ et $S(D) = O$.

b- Dédurre que I est le centre de S .

- 4) R est la rotation de centre B et d'angle $\frac{\pi}{2}$. J est le point d'intersection de (BG) et (AE) .

a- Quelle est la nature du SoR ?

b- Montrer que J est le centre de SoR .



5) Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$

- a- Déterminer la forme complexe de S et déduire l'affixe de I.
- b- Déterminer l'affixe de O et comparer $\overrightarrow{IO}$ et $\overrightarrow{IA}$.
- c- M est un point variable tel que $Z_M = x + 2(1-x)i$ et $M' = S(M)$.
Calculer $Z_{M'}$ et déduire que M' varie sur une droite dont on déterminera l'équation.

V- (3 points)

On considère un triangle OBF rectangle en O tel que $OF = 3$ et $OB = 4$.

Soit M est un point variable du plan tel que $\|\overrightarrow{MO} \wedge \overrightarrow{MB}\| = 2MF$.

Partie A

- 1) Montrer que M varie sur une Hyperbole (H) de foyer F, directrice (OB) et d'excentricité $e = 2$, dont on précisera l'axe focal.
- 2) A est un point tel que $\overrightarrow{OA} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OF}$ et A' est symétrique de F par rapport à O.
 - a- Montrer que A et A' sont les sommets de (H).
 - b- Déduire le centre I de (H) et le second foyer F'.
- 3) Un cercle de centre I et de rayon 2 coupe (OB) en G et G'.
Montrer que (IG) et (IG') sont des asymptotes de (H).
- 4) a- C est un point défini par $\overrightarrow{FC} = \frac{3}{2}\overrightarrow{OB}$. Prouver que C est un point de (H).
 - b- Calculer $CF' - CF$ et déduire CF' .
 - c- Montrer que (OC) est une bissectrice de $\widehat{CF'}$.
 - d- Tracer (H).

partie B

On considère le système orthonormé $(I, \vec{i}, \vec{j})$ avec $\vec{i} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OF}$ et $\vec{j} = \frac{1}{4}\overrightarrow{OB}$.

- 1) Ecrire une équation de (H).
- 2) Ecrire les équations des asymptotes de (H).
- 3) (P) est la parabole de sommet V(0,2) et de foyer R(0,3).
 - a- Ecrire l'équation de (P).
 - b- Montrer que (P) est tangente à (H) en L(4 ;6) et en un autre point à déterminer.

VI- (7 points):

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x - \ln(x^2 + 1)$ et soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

Partie A

- 1) a- Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
 - b- Montrer que la courbe (C) a une direction asymptotique en $+\infty$ et en $-\infty$ suivant une droite (d) d'équation $y = x$

- 2) **a-** Montrer que $f'(x) = \frac{(x-1)^2}{x^2+1}$ et construire le tableau de variations de f .
b- Vérifier que (d) est tangente à (C) en O et déterminer une tangente en $x=1$
c- Tracer (d) et (C) .
- 3) La fonction f admet sur $\mathbb{R}$ une fonction réciproque notée f^{-1} et le point d'intersection de (C_f) et $(C_{f^{-1}})$ appartient à la première bissectrice.
- a-** Résoudre l'inéquation $f(x) < x$. Dédire les valeurs de x pour que $f^{-1}(x) > x$.
b- Déterminer la direction asymptotique de la courbe de f^{-1} .
c- tracer la courbe de f^{-1} dans le même repère.
- 4) Calculer $\int f(x)dx$. Dédire l'aire du domaine limité par les courbes de f et f^{-1} et les deux droites d'équations $x = 4$ et $y = 4$.
- 5) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \frac{4}{1+x^2}$ et soit $h = f \circ g$.
a- Montrer que h est définie sur $\mathbb{R}$.
b- Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)$. Dédire l'équation d'une asymptote à la courbe de h .
c- Calculer $h'(1)$.

Partie B

Soit (u_n) une suite définie par
$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n - \ln(u_n^2 + 1) \end{cases} \quad \text{où } n \text{ est un entier naturel.}$$

- 1) **a-** Montrer que si $x \in [0;1]$ alors $f(x) \in [0;1]$.
b- Dédire que pour tout entier naturel n , $u_n \in [0 ;1]$.
- 2) Etudier le sens de variation de la suite (u_n) .
- 3) **a-** Montrer que la suite (u_n) est convergente.
b- Déterminer la limite de la suite (U_n) .

المادة: الرياضيات الشهادة: الثانوية العامة الفرع: العلوم العامة نموذج رقم -٣- المدة: أربع ساعات	الهيئة الأكاديمية المشتركة قسم: الرياضيات	 المركز التربوي للبحوث والإنماء
---	--	---

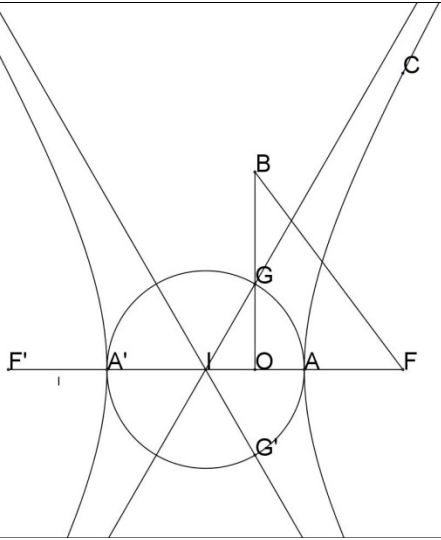
أسس التصحيح (تراعي تعليق الدروس والتوصيف المعدل للعام الدراسي ٢٠١٦-٢٠١٧ وحتى صدور المناهج المطورة)

	Question I	Note
1)	Faux L'affixe de B est: $Z_B = (\sqrt{2} + 2)e^{i(\frac{\pi}{4})}$	1
2)	Faux Les affixes des points I, F et B vérifient la relation: $Z_B = i(Z_F - 2 - 2i) + 2 + 2i$	1
3)	Faux Une mesure de l'angle de SoS est $\frac{\pi}{2}$.	1
4)	Faux L'ensemble des points M d'affixe z qui vérifient les deux conditions: $ z - 1 = z - i $ et $ z - 2 - 2i = 2$ est $\{A, B\}$.	1
	Question II	Note
1-a	$K(0;2;3)$ est un point de (d) et $\vec{KA} \cdot (\vec{AB} \wedge \vec{V}_d) \neq 0$ alors (d) et (AB) sont non-coplanaires.	1
1-b	$(d) \subset (Q)$ car $y = 2$; $\vec{AB} \perp \vec{n}_Q$ car $\vec{AB} \cdot \vec{n}_Q = 0$. $K(0;2;3) \in (d)$; $\vec{KM} \cdot (\vec{V}_d \wedge \vec{AB}) = \begin{vmatrix} x & y-2 & z-3 \\ 4 & 0 & -3 \\ -2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 0$; $y-2=0$.	1.5
1-c	$d(A; (Q)) = \frac{ 1-2 }{\sqrt{1}} = 1$	0.5
2-a	$\vec{N}_P \perp \vec{n}_Q$ car $\vec{N}_P \cdot \vec{n}_Q = 0$. (P) et (Q) sont perpendiculaires. $(P) \cap (Q) = (\Delta)$ et (P): $3x - 4z = 0$, (Q): $Y - 2 = 0$ et $z = m$ alors	1.5

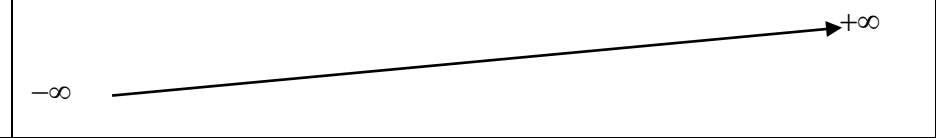
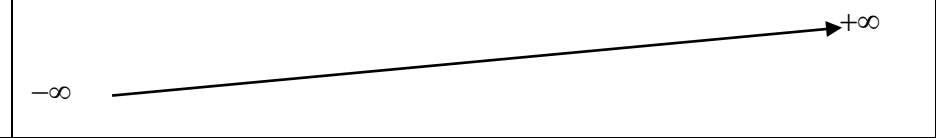
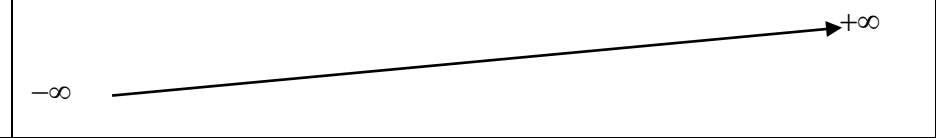
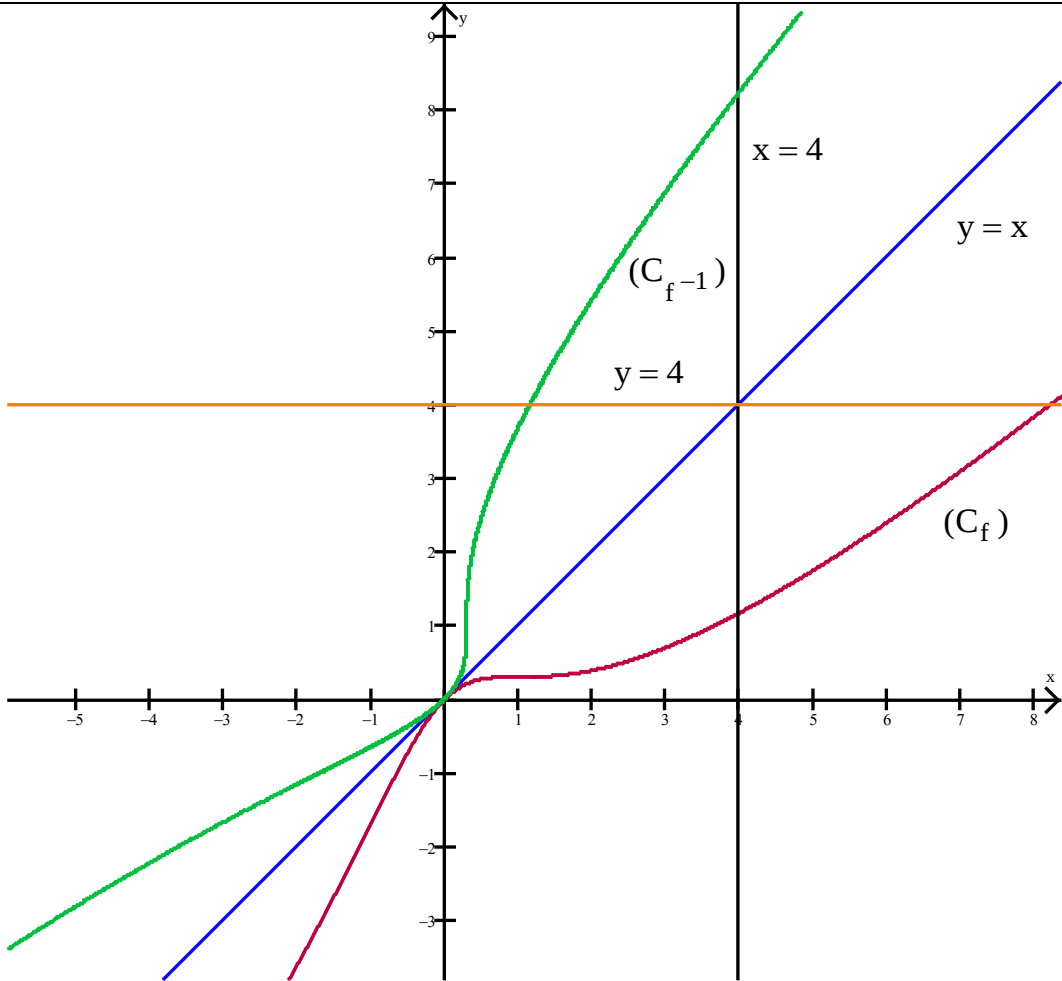
	$x = \frac{4}{3}m \text{ et } y=2 \text{ alors } (\Delta) : \begin{cases} x = \frac{4}{3}m \\ y = 2 \\ z = m \end{cases}$	
2-b	$S(1;2;\frac{3}{2}) : K(0;2;3) \vec{SK} \wedge \vec{V_d} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 0 & \frac{3}{2} \\ 4 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 3\vec{j}$ $d(S;(P)) = \frac{ 3-6 }{\sqrt{25}} = \frac{3}{5} \quad d(S;(d)) = \frac{\ \vec{SK} \wedge \vec{V_d}\ }{\ \vec{V_d}\ } = \frac{ 3 }{\sqrt{25}} = \frac{3}{5}$	1.5
	Question III	4pts
A-1	$\frac{C_3^3 + C_4^3}{C_9^3} = \frac{5}{84}$	0.5
A-2	$P(E) = \frac{C_3^2 \cdot C_6^1}{C_9^3} + \frac{C_4^2 \cdot C_5^1}{C_9^3} + \frac{C_2^2 \cdot C_7^1}{C_9^3} = \frac{55}{84}$	1
B-1	$P(X=2) = \frac{C_n^2}{C_{n+7}^2} = \frac{n(n-1)}{(n+6)(n+7)}$	0,5
B-2	$P(X=0) = \frac{C_7^2}{C_{n+7}^2} = \frac{42}{(n+6)(n+7)} \quad \text{et} \quad P(X=1) = \frac{C_n^1 C_7^1}{C_{n+7}^2} = \frac{14n}{(n+6)(n+7)}$	1
B-3	$E(X) = \frac{2n^2 + 12n}{(n+6)(n+7)} = 1 \text{ alors } n=7$	1

	Question IV	
1	S est la similitude qui transforme A en D et C en F. Rapport $\frac{DF}{AC} = 2$ et $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{DF}) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$	1
2-a	$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DG}) = \frac{\pi}{2}; \frac{DG}{AB} = 2$ alors $S(B) = G$.	0.5
2-b	$S(A) = D$ et $S(C) = F$ or C est le milieu de [AE] alors $S(C)$ est le milieu de $S([AE])$. Alors $S(E) = L$	0.5
3-a	H est milieu de [BE] ; alors $S(H) = K$ est milieu de [GL] or $S(A) = D$; alors $(AH) \perp (DK)$. $(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{DO}) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$; $\frac{DO}{DA} = \tan \hat{D}AO = \tan \hat{A}BE = 2$ alors $S(D) = O$	1
3-b	$S(I) = S((AH) \cap (DK)) = (DK) \cap (OH) = I$	0.5
4-a	$S \circ R = S'(? , 2, \pi) = h(? , -2)$.	0.5
4-b	$B \xrightarrow{R} B \xrightarrow{S} G$ alors J est le centre de $S \circ R$ or $\overrightarrow{JG} = -2\overrightarrow{JB}$	0.5
5-a	$z' = 2iz - 2$ et $Z_1 = \frac{-2}{5} - \frac{4i}{5}$	0.5

5-b	$Z_O = -2 - 4i \Rightarrow \overline{IO} = -4\overline{IA}$	0.5
5-c	$Z_{M'} = -6 + 4x + 2ix$ et M' varie sur une droite d'équation $x-2y+6=0$.	0.5
	Question V	Note
	Partie A	
1	$\ \overline{MO} \wedge \overline{MB}\ = 2A_{MOB} = MH \times OB$ avec $(MH) \perp (OB)$ $MH \times 4 = 2MF \Rightarrow \frac{MF}{d(M, OB)} = 2$ alors M varie sur une hyperbole de directrice (OB), $e=2$ et d'axe focal (OF).	0.5
2-a	$AF=2AO$, $AF' = 6 = 2A'O$ or A et A' appartiennent à l'axe focal; alors A et A' sont les sommets de (H).	0.5
2-b	I milieu de $[AA']$ et F' symétrique de F par rapport à I.	0.5
3	$\tan O\hat{I}G = \sqrt{3} = \text{Pente de l'asymptote}$. Alors (IG) et (IG') sont des asymptotes de (H).	0.5
4-a	$FC = 6 = 2d(C, OB)$ alors C est un point de (H).	0,5
4-b	$CF' - CF = AA' = 4$ alors $CF' = 10$.	0.5
4-c	$\tan O\hat{C}F = \frac{1}{2}$ et $\tan F\hat{C}F' = \frac{4}{3}$ $\tan(2O\hat{C}F) = \frac{2 \times \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{4}{3}$ alors $F\hat{C}F' = 2O\hat{C}F$ donc (CO) est bissectrice.	0,5

4-d		0.5
B		
1	$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$	0.5
2	$y = x\sqrt{3}$ et $y = -x\sqrt{3}$	0.5
3-a	$x^2 = 4(y-1)$	0.5
3-b	L(4 ;6) est un point commun de (P) et de (H). Pente de la tangente en L à (H) = pente de la tangente en L à (P) =2. donc (P) et (H) sont tangentes en L ; or (IV) est un axe de symétrie de (H) et de (P). Alors (H) et (P) sont tangentes en L'(-4 ;6).	0.5

	Question VI	Note
A1. a	et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$	0.5
A1. b	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - x] = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] = -\infty$. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$ Donc, il y a une direction asymptotique suivant la droite d'équation $y = x$.	0.5

A2. a	Tableau de variations $f'(x) = \frac{(x-1)^2}{x^2+1}$ <table border="1" data-bbox="228 296 1159 619"> <tr> <td>$-\infty$</td><td>1</td><td>$+\infty$</td></tr> <tr> <td>+</td><td>0</td><td>+</td></tr> <tr> <td colspan="3">  </td></tr> </table>	$-\infty$	1	$+\infty$	+	0	+				1
$-\infty$	1	$+\infty$									
+	0	+									
											
A2. b	$f(0) = 0$ et $y = x$ est une tangente en 0 et $y = 1$ tangente en $x=1$	0.5									
A2c		1+0.5									

A3. a	$f(x) < x$ alors $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $f^{-1}(x) > x$ alors $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.	0.5
A3. b	Direction asymptotique suivant la droite d'équation $y = x$.	0.5
A3. c	Les courbes de f et f^{-1} sont symétriques par rapport à la première bissectrice.	1
A4	$\int f(x)dx = \frac{x^2}{2} - x \ln(x^2 + 1) + 2x - 2 \arctan x + c$ $u^2 \text{ Aire} = 16 - 2 \left[\frac{x^2}{2} - x \ln(x^2 + 1) + 2x - 2 \arctan x \right]_0^4 = 8 \ln 17 + 4 \arctan 4 - 16$	2
A5a	h est définie sur $\mathbb{R}$	0.5
A5b	$;$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 2 - \ln 5$; $y = 2 - \ln 5$ A.H. $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = 2 - \ln 5$	0.5
A5c	f est dérivable en $g(x)$ $h'(x) = f'(g(x)) \times g'(x)$ et $h'(1) = \frac{-2}{5}$	1
B1a	si $x \in [0;1]$ alors $f(x) \in [0;1]$	0.5
B1b	Principe de récurrence.	1
B2	(U_n) strictement décroissante.	1
B3a	(U_n) strictement décroissante et strictement minorée par 0 alors elle est convergente.	1
B3b	Limite = 0.	0.5