

<p>المادة: الرياضيات الشهادة: الثانوية العامة الفرع: العلوم العامة نموذج رقم - ١ - المدة: أربع ساعات</p>	<p>الهيئة الأكاديمية المشتركة قسم: الرياضيات</p>	 <p>المركز التربوي للبحوث والإنماء</p>
--	--	---

نموذج مسابقة (براعي تعليق الدروس والتوصيف المعدل للعام الدراسي ٢٠١٦-٢٠١٧ وحتى صدور المناهج المطورة)

ارشادات عامة: - يسمح باستعمال آلة حاسبة غير قابلة للبرمجة او اختزان المعلومات او رسم البيانات.
- يستطيع المرشح الإجابة بالترتيب الذي يناسبه دون الالتزام بترتيب المسائل الوارد في المسابقة.

I- (2points)

Répondre par « vrai » ou « faux » en justifiant.

- 1) Le complexe $(-1+i)^{10}$ est un réel.
- 2) f' est définie sur \mathbb{R} par $f'(x) = \int_0^{x^2} \sqrt{t^2 + 4} dt$ la fonction dérivée d'une fonction f . On dit que f n'admet pas un point d'inflexion pour $x \in \mathbb{R}$.
- 3) Si $f(x) = x^2 e^x$, alors sa dérivée nième est $f^{(n)}(x) = (x^2 + 2nx + (n-1))e^x$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
- 4) $1+i+\dots+i^{19} = 0$ (i est le nombre imaginaire).

II- (2points)

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O ; i, j, k)$, on considère le plan $(P) : 3x+y-5=0$ et les droites (D) et (D') et les droites d'équations

$$(D) : \begin{cases} x = t \\ y = -3t + 5 \\ z = t - 4 \end{cases} \quad (D') : \begin{cases} x = m + 1 \\ y = -2m - 1 \\ z = -m + 3 \end{cases}$$

- 1)
 - a) Vérifier que (P) est perpendiculaire au plan (xoy) .
 - b) Montrer que la droite (D) est incluse dans le plan (P) .
- 2) Montrer que (D) et (D') se coupent en un point A dont on déterminera les coordonnées.
Dans ce qui suit, on donne le point $B(0 ; 1,4)$.
- 3) On considère dans le plan (Q) formé par (D) et (D') , un cercle (C) de centre A et de rayon AB .
 - a) Ecrire une équation du plan (Q) .
 - b) Ecrire un système d'équations paramétriques de la droite (Δ) tangente en B au cercle (C) .
- 4) Calculer les coordonnées des points E et F points d'intersections du cercle (C) avec la droite (D) .

III- (3points)

Dans une kermesse organisée par les classes terminales d'une école, on dispose de deux boites U et V .

- La boite U contient 10 cartes dont 3 portent la lettre A , 5 la lettre B et 2 la lettre C .
- La boite V contient 6 boules dont 2 rouges et 4 noires.

La règle d'un jeu est la suivante :

On tire au hasard une carte de la boîte U.

- Si le joueur tire une carte A, il tire deux boules de la boîte V successivement et avec remise
- Si le joueur tire une carte B, il tire deux boules de la boîte V successivement et sans remise
- Le jeu s'arrête si le joueur tire une carte portant C ou il tire une boule noire.

On considère les événements suivants :

A : « tirer une carte portant A »

B : « tirer une carte portant B »

C : « tirer une carte portant C »

G : « le joueur gagne »

Le joueur gagne seulement s'il tire 2 boules rouges successivement ou s'il tire une carte C.

- 1) Calculer $P(G/A)$ et montrer que $P(G \cap A) = \frac{1}{30}$.
- 2) Calculer $P(G \cap B)$, puis $P(G)$.
- 3) Pour participer à ce jeu, le joueur doit payer 2000 LL. Il gagne 5000 LL s'il tire une carte portant C et 3000 LL en tirant 2 boules rouges.

Soit X la variable aléatoire égale au gain du joueur.

- a) Montrer que les trois valeurs de X sont -2000, 1000 et 3000.
- b) Calculer la loi de probabilité de X.
- c) Estimer le gain de l'organisateur, si 100 élèves participent à ce jeu.

IV- (3 pts)

Dans le plan orienté, on donne, un rectangle ABCD de centre O tel que $AB = 4\text{cm}$, et $(\vec{AB}, \vec{AC}) = \frac{\pi}{6} (2\pi)$.

Soit E le symétrique de A par rapport à D. S est la similitude plane directe telle que $S(E)=O$ et $S(A)=B$.

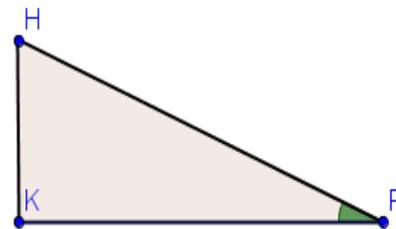
- 1) Vérifier que le rapport de la similitude est $k = \frac{1}{2}$ et déterminer la mesure de l'angle α de S.
- 2) Déterminer l'image de D par S. Montrer que C est le centre de S.
- 3) I est un point de $[EO]$, distinct de E et O ; et (Γ) est le cercle de centre I et qui passe par A. (Γ) coupe (AD) et (AB) respectivement en M et P .
 - a) Dessiner (Γ) et placer les points M et P .
 - b) Justifier que $C \in (\Gamma)$.
- 4) Soit N le projeté orthogonal de C sur (MP).
 - a) Montrer que $(\vec{MP}, \vec{MC}) = \frac{\pi}{6} (2\pi)$.
 - b) En déduire que $S(M) = N$.
- 5) Prouver que B, N et D sont alignés.
- 6) Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct (A, \vec{u}, \vec{v}) , avec $\vec{u} = \frac{1}{4}\vec{AB}$.
 - a) Déterminer les affixes des points B et C.
 - b) Donner la forme complexe de S.

V- (3points)

Dans la figure ci-contre FKH est un triangle rectangle en K tel que $FK=3\text{cm}$ et $KH=\sqrt{3}\text{cm}$

Soit A un point sur FK tel que $AK=1\text{cm}$ et soit A' symétrique de F par rapport à K.

(L) est une hyperbole du foyer F, de directrice (KH) et d'excentricité 2.



1)

- Déterminer l'axe focale de (L)
- Prouver que A et A' sont des sommets de (H).

2)

Déterminer le centre O du (L) et le second foyer F'

Montrer que (OH) est une asymptote de (H) puis trouver le second asymptote .

Tracer (L)

3) Soit G un point tel que $\overrightarrow{FG} = 2\sqrt{3}\overrightarrow{KH}$, prouver que G est un point de (L)

4) Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) , avec $\vec{u} = \overrightarrow{OK}$.

- Vérifier que l'équation de (L) est : $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$
- Prouver que (GK) est tangente à (L).

VI- (7pts)

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

(Partie A)

On considère l'équation différentielle (E) définie par : $y' + y = 1 - 2e^{-x+1}$.

- Déterminer les réels a et b tels que $Y = a + bxe^{-x}$ soit une solution particulière de (E).
- Résoudre (E). En déduire la solution particulière (E) telle que $Y(1) = 0$.

(Partie B)

Soit g une fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $g(x) = 1 + (1-2x)e^{-x+1}$. (C) est sa courbe représentative.

- Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$. En donner une interprétation géométrique.
- Calculer $g'(x)$ la dérivée de $g(x)$. Dresser le tableau de variations de g .
- Prouver que l'équation $g(x) = 0$ admet deux racines 1 et α tel que $\alpha \in [2.25, 2.26]$. Vérifier que $e^{\alpha-1} = 2\alpha - 1$.
- Résoudre $g(x) \leq 0$. En déduire les solutions de l'inéquation: $g(x^2) \leq 0$.
- Tracer (C).
- Calculer l'aire de la région délimitée par (C), la droite (Δ) d'équation $y = 1$ et les droites d'équation $x = 1$ et $x = 2$.

(Partie C)

Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par: $f(x) = 1 + x + xe^{-x^2+1}$. (Γ) est sa courbe représentative et (d) est la droite d'équation $y = x + 1$.

- 1) Calculer $f(-x) + f(x)$. Que peut-on conclure?
- 2) Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. Montrer que (d) est une asymptote oblique au voisinage de $+\infty$. Étudier la position relative de (Γ) et (d) .
- 3) Prouver que $f'(x) = g(x^2)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Vérifier que $f(\sqrt{a}) = 1 + \frac{2a\sqrt{a}}{2a-1}$.
- 4) Dresser le tableau de variations de f .
- 5) Tracer (Γ) .
- 6) Soit $(U_n)_{n \geq 0}$ la suite définie par : $U_n = \int_0^1 [f(nx) - nx] dx$.
 - a) Calculer U_0 .
 - b) Écrire U_n en fonction de n . Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$.

المادة: الرياضيات الشهادة: الثانوية العامة الفرع: العلوم العامة نموذج رقم - ١ المدة: أربع ساعات	الهيئة الأكاديمية المشتركة قسم: الرياضيات	 المركز العلمي للبحوث والأبحاث
---	--	--

أسس التصحيح (تراعي تعليق الدروس والتوصيف المعدل للعام الدراسي ٢٠١٦-٢٠١٧ وحتى صدور المناهج المطورة)

QI		Notes
1	Faux : sur l'axe des ordonnées	1
2	Faux : elle admet au point $x=0$ un point d'inflexion	1
3	Faux : pour $n=2$	1
4	Vrai : c'est une somme d'une suite géométrique du premier terme 1 et de raison $q=i$	1

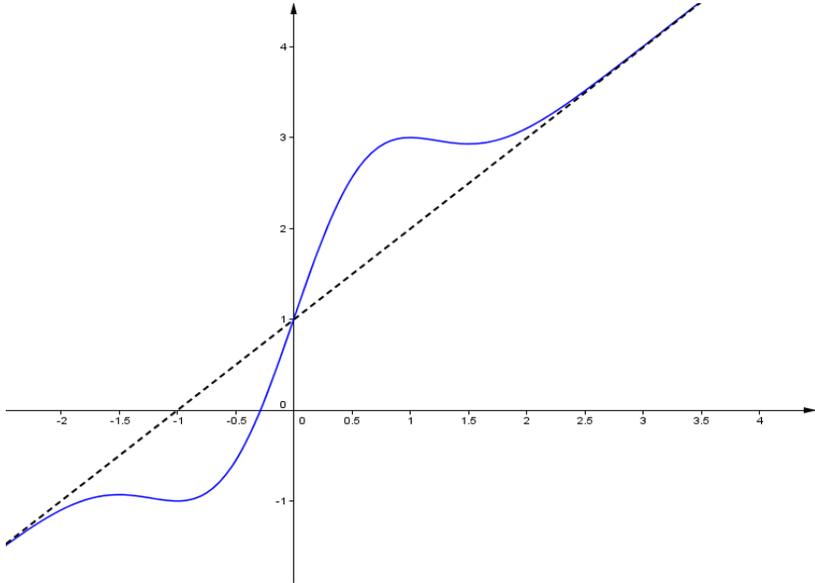
QII		Notes
1.a	$(3,1,0)(0,0,1) = 0$ alors (P) perpendiculaire au plan (xoy)	0,5
1.b	$3t-3t+5-5=0 \Rightarrow (D) \subset (P)$	0,5
2	A(4,7,0) pour $m=3$ et $t=4$	0,5
3.a	(Q) : $5x+2y+z-6=0$	0,5
3.b	$\vec{u} = \vec{AB} \wedge \vec{n}$ avec \vec{u} vecteur directeur de la tangente et \vec{n} vecteur normal du (Q) $(\Delta) : \begin{cases} x = 0 \\ y = 6\lambda + 1 \\ z = -12\lambda + 4 \end{cases}$	1
4	$t = 4 + \frac{4\sqrt{66}}{11}$ et $t = 4 - \frac{4\sqrt{66}}{11}$	1

QIII		Notes								
1	$P(G/A) = \frac{2}{6} \times \frac{2}{6} = \frac{1}{9}$. $P(G \cap A) = P(G/A) \times P(A) = \frac{1}{9} \times \frac{3}{10} = \frac{1}{30}$	1								
2	$P(G \cap B) = P(G/B) \times P(B) = \frac{2}{6} \times \frac{1}{5} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{30}$ $P(G) = P(G \cap A) + P(G \cap B) + P(C) = \frac{4}{15}$	1 1								
3.a	$-2000(\bar{G}), 1000(G \cap A \text{ ou } G \cap B), 3000(C)$.	1								
3.b	<table border="1" style="width: 100%; text-align: center;"> <tr> <td>x_i</td> <td>-2000</td> <td>1000</td> <td>3000</td> </tr> <tr> <td>$P(X=x_i)$</td> <td>$\frac{11}{15}$</td> <td>$\frac{1}{15}$</td> <td>$\frac{1}{5}$</td> </tr> </table>	x_i	-2000	1000	3000	$P(X=x_i)$	$\frac{11}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{5}$	1
x_i	-2000	1000	3000							
$P(X=x_i)$	$\frac{11}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{5}$							
3.c	$E(x) = -800$ Alors le gain de l'organisateur est $800 \times 100 = 80\,000$ LL.	1								

Q4		
1.	$k = \frac{OB}{EA}$, en utilisant le triangle équilatéral OBC : $k = \frac{BC}{2BC}$	
	$k = \frac{1}{2}$ et $\alpha = (\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{BO}) = (BC, BO) = \frac{\pi}{3} \quad (2\pi)$	1
2	L'image de D par S , D' est le milieu de $[BO]$. EAC est un triangle équilatéral. L'image du triangle EAC par S est le triangle équilatéral OBC de même sens, alors $S(C) = C$. De ce fait, C est le centre de S .	0,5
3.a		0.5
3.b	(OE) est la médiatrice de $[AC]$. $I \in (OE)$, donc $IC = IA$, $C \in (\Gamma)$.	0.5
.4.a	$(\overrightarrow{MP}, \overrightarrow{MC}) = (\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{6} \quad (2\pi)$.	0.5
.4.b	Le triangle MNC est équilatéral, donc $(\overrightarrow{CM}, \overrightarrow{CN}) = \frac{\pi}{3} \quad (2\pi)$. et $CN = \frac{1}{2}CM$. alors $S(M) = N$.	1
5	$D \in (OB)$. $M \in (EA)$, donc $N \in (OB)$. B, N et D sont alignés. $(\overrightarrow{CM}, \overrightarrow{CN}) = \frac{\pi}{3} \quad (2\pi)$	1
6.a	$Z_B = 4$ et $Z_C = 4 + 4\frac{\sqrt{3}}{3}i$	0.5
.6.b	$z' = \frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{3}}z + (1 - \frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{3}})(4 + 4\frac{\sqrt{3}}{3}i)$ $z' = \frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{3}}z + 4$	0.5

Q5		
1.a	l'axe focale est (FK)	0.5
1.b	$\frac{AF}{AK} = 2 \quad \frac{A'F}{A'K} = 2$ avec A et A' appartiennent à (FK), l'axe focal.	1
2.a	O milieu de [AA'] F' symétrique de F par rapport à O	0.5
2.b	la tangente de l'angle formé par (OH) et l'axe focale est égale à $\sqrt{3} = \frac{b}{a}$ avec a=OA=2 C=OF=4 et $c^2 = a^2 + b^2$ la deuxième asymptote est symétrique à (OH) par rapport à la droite perpendiculaire en O.	1 0.5
2.c		0.5
3.	$\frac{GF}{d(G/(HK))} = 2$ alors G appartient à (L)	0.5
4.a	a=2 et b= $2\sqrt{3}$, centre O et l'axe focale est x'ox	0.5
4.b	G(4 ;6) et K(1,0) et (GK) : y=2x-2 qui est l'équation de la tangente en G à (L)	1
Q.6		
partie A		
1	$Y = a + bxe^{-x}$, Y : vérifie (E), donc a=1 et b= -2e	0.5
.2	La solution générale est: $y = ce^{-x} + Y = ce^{-x} + 1 - 2xe^{-x+1}$ $y(1) = 0$, d'où c = e. solution particulière: $y = 1 + (1 - 2x)e^{-x+1}$	1

partieB														
1	$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 1$, donc $y = 1$ est l'équation de l'asymptote horizontale.	0.5												
2	$g'(x) = (2x - 3)e^{-x+1}$ <table border="1" style="margin-left: 20px;"> <tr> <td>x</td> <td>0</td> <td>$\frac{3}{2}$</td> <td>$+\infty$</td> </tr> <tr> <td>$g'(x)$</td> <td style="text-align: center;">-</td> <td style="text-align: center;">0</td> <td style="text-align: center;">+</td> </tr> <tr> <td>$g(x)$</td> <td style="text-align: center;">$1+e$</td> <td style="text-align: center;">-0.2</td> <td style="text-align: center;">1</td> </tr> </table>	x	0	$\frac{3}{2}$	$+\infty$	$g'(x)$	-	0	+	$g(x)$	$1+e$	-0.2	1	1.5
x	0	$\frac{3}{2}$	$+\infty$											
$g'(x)$	-	0	+											
$g(x)$	$1+e$	-0.2	1											
3	$g(1) = 0$, donc 1 est une racine. $g(2.25) = -2.77 \times 10^{-3}$ $g(2.26) = 1.54 \times 10^{-3}$ g est continue et strictement décroissante sur $[2,25; 2,26]$, alors : α est u	1												
4	$g(x) \leq 0$ si et seulement si $x \in [1, \alpha]$ $g(x^2) \leq 0$ si et seulement si $x^2 \in [1, \alpha]$ si et seulement si $x \in [1, \sqrt{\alpha}]$	1												
5		1.5												
6	$A = \int_1^2 [y_{(\Delta)} - g(x)] dx = \int_1^2 [-(1-2x)e^{-x+1}] dx$ <p>par une intégration par partie :</p> $\int_1^2 -(1-2x)e^{-x+1} dx = 3 - \frac{5}{e} \sim 1.1606$ $A = 1,16u^2$	1												
partie C														

1	$f(-x) + f(x) = 2$ et \mathbb{R} est centré en 0 $I(0,1)$	0.5															
2	$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - y_{(d)}] = 0$ $f(x) - y_{(d)} = xe^{-x^2+1}$ $\begin{cases} > 0 & \text{si } x > 0 & (\Gamma) \text{ au-dessus (d)} \\ = 0 & \text{si } x = 0 & (\Gamma) \text{ coupe (d)} \\ < 0 & \text{si } x < 0 & (\Gamma) \text{ au-dessous (d)} \end{cases}$	1															
3	$f'(x) = g(x^2)$ $f(\sqrt{\alpha}) = 1 + \frac{2\alpha\sqrt{\alpha}}{2\alpha-1}$	0.5															
4	<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr> <td style="width: 10%;">x</td> <td style="width: 20%;">0</td> <td style="width: 20%;">1</td> <td style="width: 20%;">$\sqrt{\alpha}$</td> <td style="width: 20%;">$+\infty$</td> </tr> <tr> <td>$f(x)$</td> <td>+</td> <td>0</td> <td>-</td> <td>+</td> </tr> </table> <table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="width: 10%;">$f(x)$</td> <td style="width: 20%; text-align: center;">1</td> <td style="width: 20%; text-align: center;">3</td> <td style="width: 20%; text-align: center;">$f(\sqrt{\alpha})$</td> <td style="width: 20%; text-align: center;">$+\infty$</td> </tr> </table>	x	0	1	$\sqrt{\alpha}$	$+\infty$	$f(x)$	+	0	-	+	$f(x)$	1	3	$f(\sqrt{\alpha})$	$+\infty$	1
x	0	1	$\sqrt{\alpha}$	$+\infty$													
$f(x)$	+	0	-	+													
$f(x)$	1	3	$f(\sqrt{\alpha})$	$+\infty$													
5		1.5															
6.a	$U_0 = \int_0^1 1 dx = 1$	0.5															
6.b	$U_n = \int_0^1 (1 + nxe^{-(nx)^2+1}) dx = 1 + \int_0^1 (nxe^{-(nx)^2+1}) dx$ <i>Posons $v = -(nx)^2 + 1$, donc $dv = -2n^2 x dx$, $nxdx = -\frac{dv}{2n}$</i>	1															

$U_n = 1 + \int_1^{-n^2+1} -e^v \frac{dv}{2n} = 1 - \frac{1}{2n} (e^{-n^2+1} - e)$ $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 1$	
---	--